Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Funciones de una variable real I. 6/10/2011. TEST 1.

TIPO 01

ATENCIÓN: Rellene los datos de la cabecera: a la izquierda el D.N.I. (en dos formas), a la derecha facultad, asignatura, apellidos, nombre y fecha.

1. La propiedad arquimediana de los números reales nos dice que dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$. De los siguientes enunciados, ¿cuál es equivalente a negar dicha propiedad?

   a) Existen $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tales que $x \geq ny$.

   b) Existen $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $x \geq ny$.

   c) Existen $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\frac{1}{n} \geq \frac{y}{x}$.

   d) Existen $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \leq 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $x \geq ny$.

   e) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $x \geq ny$.

   f) Ninguna de las anteriores.

2. ¿Es cierto lo que sigue?

   a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen s_n y t_n irracionales y r_n racional con $\frac{1}{n+1} < s_n < r_n < t_n < \frac{1}{n}$.

   b) El producto de dos irracionales es un irracional.

   c) Si n, m son números naturales no cuadrados perfectos entonces $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ es un irracional.

   d) Todo número irracional tiene un inverso que es también un número irracional.

   e) El producto de un número racional por un número irracional es un número irracional.

   f) Ninguna de las anteriores.

3. La conjetura de Goldbach afirma que cada número natural par mayor que 2 es suma de dos números primos. No se conoce si la conjetura es cierta o falsa. Supongamos que quieres demostrar que es falsa, ¿cuál de los siguientes enunciados deberías intentar demostrar?:

   a) Para todo par de primos a y b, $a + b$ no es par.

   b) Existe $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$,tal que para cada par de primos a y b se verifica $2n \neq a + b$.

   c) Existe $m \in \mathbb{N}$, impar $m \geq 5$, tal que para cada par de primos a y b se verifica $m \neq a+b+1$.

   d) Para cada natural $n > 1$, existen primos a y b tales que $2n \neq a + b$.

   e) La suma de dos primos es siempre impar.

   f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es

4. En $\mathbb{R}$ se verifica que:

   a) $x < y, z < w \Rightarrow xz < yw$.
   b) $x < y + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq y$.
   c) $x < y, z < w \Rightarrow x + z < y + w$.
   d) $0 \leq x < y \Rightarrow x^2 < y^2$.
   e) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$.
   f) Ninguna de las anteriores.

5. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados inferiormente y sea $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Entonces:

   a) Si $A \subset B$, entonces $\inf A \geq \inf B$.
   b) Si $A \subsetneq B$, entonces $\inf A > \inf B$.
   c) $A + B$ es acotado inferiormente e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
   d) $A + B$ es acotado inferiormente e $\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B$.
   e) Ninguna de las anteriores.

6. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, $A \cap B$ su intersección, $A \cup B$ su unión y $AB := \{x = ab : a \in A, b \in B\}$. Entonces:

   a) $A \cup B$ está acotado superiormente y $\sup(A \cup B) = \sup A + \sup B$.
   b) AB está acotado superiormente y $\sup(AB) = \sup A \sup B$.
   c) Si $A \subset B$ entonces $\sup A \leq \sup B$.
   d) Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \cap B$ está acotado superiormente y $\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup A, \sup B\}$.
   e) Ninguna de las anteriores.

7. Sea A un subconjunto no vacío de números reales y $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Cual de los siguientes enunciados asegura que $\alpha = \sup A$?

   a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.
   b) Para todo $x \in A$, $x \leq \alpha$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $\alpha - \frac{1}{n} < x_n \leq \alpha$.
   c) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A$, $x \leq \alpha$, $x \leq M$ y $\alpha \leq M$.
   d) Para todo $M \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in A$, $x \leq \alpha$, $x \leq M$ y $\alpha \leq M$.
   e) Ninguna de las anteriores.

Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

8. Sea $A = \{x \in \mathbb{Q} : 2x^3 + 1 < 15\}$. ¿Cual de las siguientes afirmaciones es correcta?

   a) $\text{ínf } A = -\sqrt[3]{7}, \sup A = \sqrt[3]{7}$.

   b) No existe $\sup A$ porque $\sqrt[3]{7} \notin A$.

   c) $\sup A = \sqrt[3]{7}$ y no existe ínf A.

   d) A no está acotado inferiormente y $\sup A \in A$.

   e) $\sup A = 2$ e ínf $A = 0$.

   f) Ninguna de las anteriores.

9. Queremos hallar todos los números naturales que verifican la desigualdad $2^n > 4n - 1$, es decir, aquellos que pertenecen al conjunto $A := \{n \in \mathbb{N} : 2^n > 4n - 1\}$. ¿Cómo lo haríamos?

   a) No podemos hallarlos todos porque es imposible probar con infinitos números.

   b) Por inducción: como $4 \in A$ y si suponemos que existe un natural $n \geq 4$ con $n \in A$ entonces probamos que $n + 1 \in A$. Concluimos que $A \equiv \{n \in \mathbb{N} : n \geq 4\}$.

   c) No podemos usar inducción ya que $1 \notin A$.

   d) La desigualdad es falsa para todo $n \in \mathbb{N}$ ya que si llamamos $B := \mathbb{N} \setminus A$, tenemos que $1 \in B$, $2 = 1 + 1 \in B$ y también $3 = 2 + 1 \in B$ luego el principio de inducción asegura que $B = \mathbb{N}$, es decir, ningún número natural cumple la desigualdad.

   e) Ninguna de las anteriores.

10. Supongamos que queremos establecer la desigualdad $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Una buena idea es demostrarla por inducción: para $\mathbf{n} = 1$ es cierta; supuesta cierta para n, consideramos la siguiente deducción para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) && (1)\\
(1+x)^n(1+x) &\geq (1+nx)(1+x) && (2)\\
(1+nx)(1+x) &= 1+(n+1)x+nx^2 && (3)\\
1+(n+1)x+nx^2 &\geq 1+(n+1)x && (4)
\end{aligned}$$

    Nuestras conclusiones son:

   a) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ no es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$.

   b) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ si es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, porque todos nuestros razonamientos (1), (2), (3) y (4) son correctos.

   c) El paso de (4) es erróneo.

   d) El paso de (2) es correcto sólo si $x \geq -1$.

   e) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ si es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \geq -1$, porque todos nuestros razonamientos (1), (2), (3) y (4) son correctos en este caso.

   f) Ninguna de las anteriores.