Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

1^o Grado en Matemáticas
Funciones de una variable I. Curso 2011-12.
Taller de Problemas 4

1. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 3x - x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad i(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en 0 tal que $g(0) = g'(0) = 0$. Hallar $f'(0)$ donde

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \operatorname{sen}(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

3. Sea $g : I \to \mathbb{R}$ derivable en un entorno de $x = 0$ con $g(0) = g'(0) = 0$ y tal que admite derivada segunda en $x = 0$ con $g''(0) = 17$. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demostrar que f es derivable en 0 y calcular $f'(0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Supongamos que no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f'(x) = 0$. Demostrar que $S = \{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$ es un conjunto finito.

5. Sea $f : I \subset\to \mathbb{R}$ definida en el intervalo I tal que para todo par de puntos $x, y \in I$, se tiene $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ con $M > 0$ y $\alpha > 1$. Probar que f es constante en I.

6. Sean $u, v : I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en el intervalo I siendo además $u(x) > 0$ para todo $x \in I$. Calcular la función derivada de $f(x) = (u(x))^{v(x)}$.

7. Calcular la función derivada de las siguientes funciones, justificando previamente su derivabilidad, y simplificando lo más posible el resultado:

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \arctan \sqrt{x-1} - \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{x-1}{x}},\ x > 1 & , & g(x) = \log \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},\ 0 < x < 1 \\ h(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}),\ x > a & , & i(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x},\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ j(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ -1 < x < 1 & , & k(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},\ 0 < x < \pi \end{array}$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es

8. Demostrar las siguientes desigualdades:
$$e^x > \frac{1}{1+x}, \text{ para } x > 0 \text{ y } \operatorname{sen} x < x, \text{ con } x \in (0, +\infty).$$
9. Demostrar que si $0 < a \leq b$ se tiene $1 - \frac{a}{b} \leq \log \frac{b}{a} \leq \frac{b}{a} - 1$.
10. Probar que la recta $y = -x$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ en algún punto. Hallar el punto de tangencia y estudiar si esta tangente corta a la gráfica en otro punto distinto al del punto de tangencia.
11. Hallar el triángulo rectángulo de área máxima, si la suma de un cateto y la hipotenusa es constante.
12. Hallar el volumen máximo de un cono con una generatriz dada l.
13. Hallar las coordenadas de los puntos de la curva $y^2 = 4x$ tales que sus distancias al punto $(4, 0)$ sean mínimas.
14. Demostrar que la suma de un número real mayor que cero y su inverso no es menor que 2.
15. Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ en el intervalo $[-10, 10]$ y de $g(x) = (x-1)^4(x+2)^2$ en $[-2, 2]$.
16. Se considera la función real $f(x) = x^n(1-x)^m + 1$. Probar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, 1)$ sin calcular esta derivada.
17. Sea f una función real derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f(0) = 0$ y que $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $|f(x)| < |x|$ para todo $x \neq 0$.
18. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Supongamos que f se anula en tres puntos distintos de (a, b). Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.
19. Separar las raíces de las ecuaciones:
$$2x^3 + 3x^2 - 12x + 12 = 0, \qquad x^4 - 38x^2 + 120x - 100 = 0, \qquad e^x + x = 0$$
20. Calcular los límites que se indican a continuación:

$(a)\ \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x - \sqrt{x}}$, $(b)\ \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x - e^x}{(\arctan x)^2}$, $(c)\ \lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{\log x}}$

$(d)\ \lim_{x\to +\infty} (\log x)^{\frac{1}{1-\log x}}$, $(e)\ \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$, $(f)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\operatorname{sen}(2x)}$

21. Se consideran las funciones $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Comprobar que, cuando $x \to 0$, el cociente $f(x)/g(x)$ tiene límite, mientras que el cociente $f'(x)/g'(x)$ no lo tiene. Comparar este resultado con la regla de L'Hospital.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es