Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

1^o Grado en Matemáticas
Funciones de una variable I. Curso 2011-12.
Taller de Problemas 3

1. Estudiar la existencia de los siguientes límites y calcular su valor o los valores de los límites laterales correspondientes, cuando existan:

$$\begin{array}{llll}
\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} & \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+x} & \lim_{x\to 0}(2+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})) & \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})} \\
\lim_{x\to \infty} e^{-x}\cos x & \lim_{x\to -\infty} \frac{3-x^2}{1-2x^2} & \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} & \lim_{x\to 1} \sqrt{1+8x^4} \\
\lim_{x\to \infty} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \lim_{x\to \infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1} & \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x} & \lim_{x\to \infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}
\end{array}$$

2. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función monótona definida en un intervalo abierto I. Probar que para todo $c \in I$ existen $\lim_{x\to c^+} f(x)$ y $\lim_{x\to c^-} f(x)$.

3. Determinar los dominios de definición y los puntos de discontinuidad de las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x-[x]}, \quad f(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}, \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{|x-1|}$$

4. ¿Qué se puede decir de una función real continua que sólo toma valores racionales?

5. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{2x+4} & \text{si} \quad x < -2 \\ 2 & \text{si} \quad x = -2 \\ \frac{x^2-4}{4x-8} & \text{si} \quad -2 < x \le 1 \\ \frac{x^2+x-2}{4x-4} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

6. Estudiar la continuidad de la función en $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1] \end{cases}$$

7. Dadas dos funciones reales f y g continuas en x_0. Probar que las funciones $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ y $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ también son continuas en x_0.

8. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Pruebe que la ecuación $f(x) = x$ tiene solución en $[0,1]$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es

9. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [a, b]$. Demostrar que existe un número real $k > 0$ tal que $|f(x) - x| > k$ para todo $x \in [a, b]$.

10. Demostrar el Teorema de Bolzano sobre la existencia de ceros de funciones continuas sin usar el principio de Cantor de los intervalos encajados.

11. Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución y dar un valor aproximado de la misma (con una precisión de un par de cifras decimales):

$$x - \operatorname{sen} x - 5 = 0 \qquad xe^{-x} + 1 = 0$$

12. Demostrar que todo polinomio con coeficientes reales de grado impar tiene al menos una raíz real.

13. Probar que si $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es una función continua con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, entonces f alcanza su valor máximo en $\mathbb{R}$.

14. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existen los límites $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ y son finitos. Demostrar que f es uniformemente continua en (a, b).

15. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones uniformemente continuas. Probar que $f + g$ también lo es. ¿Es uniformemente continua fg?

16. Estudiar la continuidad uniforme de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
    a) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{|x|})$.
    b) $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

17. Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en I.
    a) Probar que si f es uniformemente continua, entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
    b) Suponed que f es continua, pero no uniformemente: mostrar con un ejemplo que la afirmación anterior es falsa.
    c) Suponed otra vez que f es continua, pero no uniformemente. ¿Puedes dar una condición sobre I que asegure que la afirmación del primer apartado es cierta?

18. Probar que $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ definida en $\mathbb{R}$ es inyectiva y que su inversa es continua en su intervalo de definición.