1^o Grado en Matemáticas
Funciones de una variable I.
Curso 2011-12.
Taller de Problemas 2

1. Aplicando la definición de límite demostrar que la sucesión cuyo término general es $x_n = \frac{3n^2+5}{n^2+1}$ converge a 3.

2. Utilizando el concepto de límite resolver las siguientes cuestiones

   a) Una sucesión es convergente en $\mathbb{R}$ y sus términos son alternativamente, positivos y negativos. ¿Cual es su limite? Razonar la respuesta.

   b) Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones convergentes a x e y respectivamente que satisfacen la siguiente propiedad:

   $$(*) \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \text{ se cumple } |x_n - y_n| < \varepsilon.$$

   Demostrar que $x = y$. Recíprocamente, si dos sucesiones cumplen la propiedad (*), ¿se puede concluir que son convergentes? Ejemplos.

   c) Probar que si $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lambda$, la sucesión $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ también tiene limite λ.

   d) Probar que si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y la sucesión $(y_n)_n$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

3. Probar que las siguientes sucesiones, definidas por recurrencia, son convergentes en $\mathbb{R}$ y calcular su límite.

   a) $x_1 = 1$, $x_n = \frac{x_{n-1}(1+x_{n-1})}{1+2x_{n-1}}$, para $n > 1$.

   b) $y_1 = 1, y_{n+1} = \sqrt{1+y_n}$, para $n \geq 1$.

   c) $z_1 = 3, z_{n+1} = \frac{4z_n+2}{z_n+3}$, para $n \geq 1$.

4. Una sucesión $(a_n)_n$ se dice que es *contractiva* si existe $0 < c < 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $|a_{n+1} - a_n| < c|a_n - a_{n-1}|$. Demostrar que las sucesiones contractivas son de Cauchy. Como aplicación probar que la sucesión definida por recurrencia: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + 1/a_n$, para $n \geq 1$, es convergente en $\mathbb{R}$ y calcular su límite.

5. Sea (x_n) una sucesión de números reales positivos con $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log x_n}{x_n - 1} = 1$.

6. Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es

(i) $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$.

(ii) $\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4+2}} + \ldots + \frac{n+n}{\sqrt{n^4+n}}$.

(iii) $\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n}$

(iv) $\frac{n+2}{n^2+1} + \frac{n+4}{n^2+2} + \ldots + \frac{n+2n}{n^2+n}$

7. Determinar qué sucesiones de las siguientes poseen subsucesiones convergentes en $\mathbb{R}$. En caso afirmativo hallar todos los límites de dichas subsucesiones.

   (i) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/4)$

   (ii) $b_n = 1/n$ si n es impar y $b_n = 1$ si n es par

   (iii) $c_n = \frac{n-1}{n^2-1}$

   (iv) $d_n = \frac{\sqrt{n^3+1}}{n}$

   (v) La sucesión cuyos primeros términos son:
   $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

8. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales o complejos tales que existe el límite en $\mathbb{R}$ de las subsucesiones $(x_{2n})_n$ y $(x_{2n+1})_n$. ¿Existe $\lim_n x_n$?. Si además existe $\lim_n x_{3n}$, ¿existe $\lim_n x_n$?

9. Demostrar los siguientes resultados:

   a) Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = +\infty$ entonces $\lim_n a_n + b_n = +\infty$. (Si ambos límites son $-\infty$ la suma tiene por límite $-\infty$.)

   b) Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = b \neq 0$ entonces $\lim_n a_n b_n = +\infty$ o $\lim_n a_n b_n = -\infty$ según que b sea positivo o negativo.

   c) Si $\lim_n a_n = \infty$ y $\lim_n b_n = \infty$ entonces $\lim_n a_n b_n = +\infty$ (si ambos son $+\infty$ o $-\infty$), y vale $-\infty$ si los límites de a_n y b_n tienen signos opuestos.

   d) Si $\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$ y $\lim_n b_n = \pm\infty$ entonces $\lim_n a_n/b_n = 0$.

   e) Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) entonces $\lim_n a_n^{b_n} = +\infty$ (resp. 0).

   f) Si $\lim_n a_n = 0$ (con $a_n > 0$, para todo n) y $\lim_n b_n = +\infty$ entonces $\lim_n a_n^{b_n} = 0$.

10. Comprobar con ejemplos que no puede asegurarse nada en los siguientes casos:

$\lim_n a_n + b_n$	si $\lim_n a_n = +\infty$,	$\lim_n b_n = -\infty$
$\lim_n a_n b_n$	si $\lim_n a_n = \pm\infty$,	$\lim_n b_n = 0$
$\lim_n a_n/b_n$	si $\lim_n a_n = \pm\infty$,	$\lim_n b_n = \pm\infty$
$\lim_n a_n/b_n$	si $\lim_n a_n = 0$,	$\lim_n b_n = 0$
$\lim_n a_n^{b_n}$	si $\lim_n a_n = 0$,	$\lim_n b_n = 0$
$\lim_n a_n^{b_n}$	si $\lim_n a_n = \pm\infty$,	$\lim_n b_n = 0$
$\lim_n a_n^{b_n}$	si $\lim_n a_n = 1$,	$\lim_n b_n = \pm\infty$

11. Algunos resultados útiles para el cálculo de límites:

    a) Si $a \in \mathbb{R}$ y $|a| < 1$ entonces $\lim_n a^n = 0$.

    b) Si $a > 0$, $\lim_n a^{1/n} = 1$

    c) $\lim_n n^{1/n} = 1$.

    d) Si $\lim_n x_n = +\infty$ entonces $\lim_n \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ y $\lim_n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e^{-1}$.

    e) Si existe $\lim_n \frac{z_{n+1}}{z_n} = w \in \mathbb{R}$ con $|w| < 1$, entonces $\lim_n z_n = 0$.

    f)
$$\lim_n \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots}{b_r n^r + b_{r-1} n^{r-1} + \dots} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_r} & si \quad k = r \\ 0 & si \quad k < r \\ \pm\infty & si \quad k > r \text{ dep. signos de } a_k, b_r \end{cases}$$

12. Si $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones con límite $+\infty$ escribimos $b_n \ll a_n$ si $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.
    Si $b > 0$, $c > 1$ y $d > 0$ son números reales se tiene
$$\log n \ll n^b \ll c^n \ll n^{dn}.$$
    Además, si $d \geq 1$ entonces
$$c^n \ll n! \ll n^{dn}.$$

13. Otro resultado útil (criterios de Stolz): Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones de números reales que cumplen una de las dos condiciones siguientes:

    a) $(b_n)_n$ es estrictamente creciente (decreciente) y $\lim a_n = \lim b_n = 0$, o

    b) $(b_n)_n$ es estrictamente creciente (decreciente) y $\lim b_n = +\infty$.

    Entonces, si existe $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$ con $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ también se verifica $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$.

14. Calcular los siguientes límites:

    (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3+6+\cdots+3n}{n^2}$

    (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

    (c) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n^{3/2} + 1} - \sqrt{n^2 - n^{3/2} - 1})$

    (d) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$

    (e) $\lim_{n\to\infty} n \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\log n}$

    (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n \sqrt[n]{n}-1}{\log n}$

    (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-2)(3n+1)(2n-5)^2}{n^2(2n+3)(3n-1)}$

    (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{4}-4\sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[3]{n-3}(4-\sqrt[5]{n})}$

    (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

    (j) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{a})^n$

    (k) $\lim_{n\to\infty} (\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-1}})^{\sqrt{n}}$

    (l) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1+n\log n}{n \log n})^n$

    (m) $\lim_{n\to\infty} (\frac{\log(n+a)}{\log n})^{n \log n}$

    (n) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$

    (o) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

    (p) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es

15. Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Si $(x_n)_n$ es una sucesión numérica tal que
$$|x_{n+1} - x_n| \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
probar que $(x_n)_n$ es una sucesión convergente.

16. Consideremos la serie (convergente) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Denotemos por S_n la suma parcial n-ésima de dicha serie. Calcular $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ e inducir un probable valor de S_n. Probar por inducción que S_n coincide efectivamente con el valor obtenido anteriormente. ¿Cuánto suma la serie?

17. Si la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Probar que también convergen las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

18. Estudiar la convergencia de las series:

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n+2}}$	$(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{4^n}$	$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n^2}{n^2-1}$	$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$
$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	$(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$	$(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n}}{n^2+n!}$	$(h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^3+5n)}{3^n+4}$
$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^n e^{-n^2}$	$(j)\ \sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1})$	$(k)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$	$(l)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{3n+2})^n \log n$
$(m)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n}$	$(n)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{3\cdot6\cdot9\ldots(3n)}$	$(o)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$	$(p)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$
$(q)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log(1+\frac{1}{n})}$	$(r)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$	$(s)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$	$(t)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es