Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

1^o Grado en Matemáticas
Funciones de una variable I.
Curso 2011-12.
Taller de Problemas 1

1. Usando el método de inducción probar las siguientes fórmulas:

   (i) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

   (ii) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

   (iii) $n(n^2+5)$ es un múltiplo de 6,

   (iv) $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = \dot{11}$ (múltiplo de 11).

   (v) $n! > 2^{n-1}$, para $n = 3, 4, \ldots$

   (vi) $2!\,4! \cdots (2n)! > ((n+1)!)^n$, para $n = 2, 3, \ldots$

2. Dados $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_{i+1} = ra_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ y $r \in \mathbb{R}$ (progresión geométrica) se verifica

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{a_0 - ra_n}{1 - r}$$

3. Demostrar las siguientes propiedades de números naturales:

   (i) Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n + m \in \mathbb{N}$.

   (ii) Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n > m$, entonces $n - m \in \mathbb{N}$.

   (iii) Si $n, m \in \mathbb{N}$ entonces $nm \in \mathbb{N}$.

   (iv) Todo número natural es par o impar.

   (v) No existe ningún número natural entre 1 y 2.

4. Decir si son ciertas o falsas cada una de las afirmaciones siguientes sobre números reales:

   (i) $t^2 > 0$ si $t \neq 0$;

   (ii) $x < y, z < w \Rightarrow x + z < y + w$;

   (iii) $x < y, z < w \Rightarrow xz < yw$;

   (iv) $x < y \Leftrightarrow -x > -y$;

   (v) $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$;

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es. y luis@um.es

(vi) $x < y + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq y$;

(vii) $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$;

(viii) $(x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$;

(ix) $\varepsilon > 0, x \geq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{x}{m} < \varepsilon \, \forall m \geq n$;

(x) $x > 1, y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x^n \leq y < x^{n+1}$.

5. Si a es racional y b es irracional, ¿es $a + b$ necesariamente irracional?. Si a es irracional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional?. Probar que $\sqrt{3}, \sqrt{6}$ y $\sqrt{12}$ son irracionales.

6. Demostrar que si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ entonces existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

7. Resolver las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$

   (i) $|x - 1| < |x + 1|$

   (ii) $\frac{a|x|+1}{x} < 1$

   (iii) $x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0$

   (iv) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} > 0$

   (v) $x^2 > x$

   (vi) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

   (vii) $5 < |2x - 7| < 35$

   (viii) $-12 \geq |3x - 4|$

   (ix) $|x + 1| + |x - 1| \leq 4$

   (x) $|x^2 - x| + x > 1$

   (xi) $\frac{2x-1}{3x+2} \leq 1$

8. Si $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple: $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

9. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definen

   $A + B := \{x = a + b : a \in A, b \in B\}$,

   $AB := \{x = ab : a \in A, b \in B\}$,

   $(\alpha A) := \{x = \alpha y : y \in A\}$.

   (i) Si A y B están acotados superiormente entonces también lo están $A \cup B$ y $A + B$ siendo

   $$\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\} \quad \text{y} \quad \sup\{A + B\} = \sup A + \sup B$$

(ii) Si A y B están acotados superiormente y todos los elemento de A y B son números positivos, probar que

$$\sup AB = \sup A \sup B$$

(iii) Si $A \subset B$ y B está acotado, entonces:

$$\sup A \leq \sup B \quad \text{ e } \quad \text{ínf}\, A \geq \text{ínf}\, B$$

(iv) A y B están acotados y si $a \leq b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ entonces:

$$\sup A \leq \sup B \quad \text{ e } \quad \text{ínf}\, A \leq \text{ínf}\, B.$$

(v) Probar que si A está acotado entonces:

$$\sup(\alpha A) = \alpha \sup A \quad \text{ e } \quad \text{ínf}(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A), \text{ si } \alpha > 0$$

$$\sup(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}\, A \quad \text{ e } \quad \text{ínf}(\alpha A) = \alpha \sup(A), \text{ si } \alpha < 0$$

(vi) Enunciar y demostrar lo resultados análogos de (i) para el ínfimo.

10. Expresar los siguientes números complejos en forma binomial

$$i^5 + i^{19},\ 1 + i + i^2 + i^3,\ \frac{(3-i)^3}{(-1-i)^5},\ (1+i)^3,\ (1+i)^{10}$$

$$\sqrt[3]{-8},\ \frac{1}{1+i},\ \frac{2+3i}{2-4i},\ i^{175},\ (2+3i)(3-4i)$$

11. Calcular los valores de las siguientes raíces:

$$\sqrt[8]{1},\ \sqrt[3]{-2+2i},\ \sqrt[5]{-4+3i},\ \sqrt[3]{-i}$$

12. Si $z, w \in \mathbb{C}$, probar que

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Interpretar geométricamente esta identidad.

13. Demostrar que $|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

14. Determinar los números complejos cuyo cuadrado coincide con alguna de sus raíces cuadradas.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es. y luis@um.es