Universidad de Murcia

Departamento Matemáticas

Funciones de Una Variable Real I: Sucesiones numéricas

B. Cascales y L. Oncina

Universidad de Murcia
http://webs.um.es/beca

Grado en Matemáticas
Curso 2011-2012

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Cantor, Bolzano-Weierstrass y Cauchy.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Cantor, Bolzano-Weierstrass y Cauchy.
5. Introducción a las series. Primeros criterios de convergencia.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Cantor, Bolzano-Weierstrass y Cauchy.
5. Introducción a las series. Primeros criterios de convergencia.
6. Infinitos: comparación de infinitos.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Cantor, Bolzano-Weierstrass y Cauchy.
5. Introducción a las series. Primeros criterios de convergencia.
6. Infinitos: comparación de infinitos.
7. Estudio de las funciones exponencial y logaritmo.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Cantor, Bolzano-Weierstrass y Cauchy.
5. Introducción a las series. Primeros criterios de convergencia.
6. Infinitos: comparación de infinitos.
7. Estudio de las funciones exponencial y logaritmo.
8. Manipular expresiones involucrando límites. Resolver ejercicios que involucran límites.

Sumas parciales y suma total

Definición

1. Se llama sucesión en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (representados indistintamente por $\mathbb{K}$) a cualquier aplicación $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $a_n := \varphi(n)$ la sucesión se denota con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o brevemente $(a_n)_n$. El número real a_n recibe el nombre de término general de la sucesión.

Sumas parciales y suma total

Definición

1. Se llama sucesión en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (representados indistintamente por $\mathbb{K}$) a cualquier aplicación $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $a_n := \varphi(n)$ la sucesión se denota con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o brevemente $(a_n)_n$. El número real a_n recibe el nombre de término general de la sucesión.
2. Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por límite $a \in \mathbb{K}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|a_n - a| < \varepsilon$. La notación que se utiliza es la siguiente:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n.$$

Sumas parciales y suma total

Definición

1. Se llama sucesión en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (representados indistintamente por $\mathbb{K}$) a cualquier aplicación $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $a_n := \varphi(n)$ la sucesión se denota con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o brevemente $(a_n)_n$. El número real a_n recibe el nombre de término general de la sucesión.
2. Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por límite $a \in \mathbb{K}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|a_n - a| < \varepsilon$. La notación que se utiliza es la siguiente:
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n.$$
3. Una sucesión se dice convergente cuando tiene límite.

Progreso

2011-12. 14 octubre

- Se hace un problema diario en clase.
- El día 6 de Octubre se hizo un taller: con test.
- Hemos llegado hasta el item 4 de debajo.
- El día 20 de Octubre se hará el segundo taller con test.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.
2. La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.
2. La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0.
3. La sucesión dada por

$$a_n := \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1}$$

tiene límite cero.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.
2. La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0.
3. La sucesión dada por
$$a_n := \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1}$$
tiene límite cero.
4. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{K}$ y $a = \lim_n a_n$, entonces se cumple que $|a| = \lim_n |a_n|$.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.
2. La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0.
3. La sucesión dada por
$$a_n := \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1}$$
tiene límite cero.
4. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{K}$ y $a = \lim_n a_n$, entonces se cumple que $|a| = \lim_n |a_n|$.
5. Si $a_n > 0$ para todo n y existe $a = \lim_n a_n$ entonces $\lim_n \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

6. Si $r \in \mathbb{K}$ y $|r| < 1$ entonces la sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n := r^n$ tiene límite 0.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

6. Si $r \in \mathbb{K}$ y $|r| < 1$ entonces la sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n := r^n$ tiene límite 0.
7. La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde
$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} i$$
tiene por límite i.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

6. Si $r \in \mathbb{K}$ y $|r| < 1$ entonces la sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n := r^n$ tiene límite 0.
7. La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde
$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} i$$
tiene por límite i.
8. Una *progresión geométrica* de razón r es una sucesión $(a_n)_n$ en $\mathbb{K}$ donde a_1 es un elemento arbitrario de $\mathbb{K}$ y $a_n := a_1 r^{n-1}$ para $n > 1$. Si $|r| < 1$ se tiene
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_n \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} = \frac{a_1 - \lim_n a_1 r^{n-1} r}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}$$

Intervalos

Definición

Si $a \leq b$ son números reales:

- Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$

Intervalos

Definición

Si $a \leq b$ son números reales:

- Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$
- Se llama intervalo abierto de extremos a, b al conjunto
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$

Intervalos

Definición

Si $a \leq b$ son números reales:

- Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$
- Se llama intervalo abierto de extremos a, b al conjunto
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$
- Los conjuntos $[a, b)$ y $(a, b]$ reciben el nombre de intervalos semiabiertos por la derecha e izquierda respectivamente:
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} \quad (a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$

Intervalos

Definición

Si $a \leq b$ son números reales:

- Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$
- Se llama intervalo abierto de extremos a, b al conjunto
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$
- Los conjuntos $[a, b)$ y $(a, b]$ reciben el nombre de intervalos semiabiertos por la derecha e izquierda respectivamente:
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} \quad (a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$
- Se llama longitud del intervalo al número real $b - a$.

Bolas. Propiedades de las sucesiones convergentes

Definición

1. Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.
2. Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

Bolas. Propiedades de las sucesiones convergentes

Definición

1. Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.
2. Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

Proposición

El límite de una sucesión convergente es único.

Bolas. Propiedades de las sucesiones convergentes

Definición

1. Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.
2. Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

Proposición

El límite de una sucesión convergente es único.

Definición

Una sucesión se dice acotada si su imagen, es decir el conjunto $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$, es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Bolas. Propiedades de las sucesiones convergentes

Definición

1. Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.
2. Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

Proposición

El límite de una sucesión convergente es único.

Definición

Una sucesión se dice acotada si su imagen, es decir el conjunto $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$, es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Proposición

Las sucesiones convergentes de $\mathbb{K}$ son acotadas.

Sucesiones complejas

Proposición

Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $z_n = a_n + ib_n$ donde a_n y b_n son, respectivamente, la parte real e imaginaria del complejo z_n.

1. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite $z = a + bi$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite b.
2. Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite b, entonces $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite $a + bi$.

Álgebra de límites

Proposición

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$ con límites a y b, respectivamente. Entonces:

1. $(a_n + b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite $a + b$.

Álgebra de límites

Proposición

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$ con límites a y b, respectivamente. Entonces:

1. $(a_n + b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite $a + b$.
2. $(a_n b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite ab.

Álgebra de límites

Proposición

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$ con límites a y b, respectivamente. Entonces:

1. $(a_n + b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite $a + b$.
2. $(a_n b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite ab.
3. Si $b_n \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces la sucesión $(a_n/b_n)_n$ tiene por límite a/b.

Convergencia y monotonía

Proposición

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.

1. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.

Convergencia y monotonía

Proposición

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.

1. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.
2. Si $a < b$, entonces se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b_n$ para todo $n > n_0$.

Convergencia y monotonía

Proposición

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.

1. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.
2. Si $a < b$, entonces se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b_n$ para todo $n > n_0$.
3. Si $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ son sucesiones de números reales tales que
$$a_n \leq c_n \leq b_n$$
y $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \alpha$, entonces $\lim_n c_n = \alpha$ (regla del sandwich).

Convergencia y monotonía

Proposición

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.

1. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.
2. Si $a < b$, entonces se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b_n$ para todo $n > n_0$.
3. Si $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ son sucesiones de números reales tales que
$$a_n \leq c_n \leq b_n$$
y $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \alpha$, entonces $\lim_n c_n = \alpha$ (regla del sandwich).

Aplicación

Sea $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}_+$ y $[x]$ su parte entera.
Calcular:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n^2}.$$

Convergencia y monotonía

Definición

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

1. Se dice que la sucesión es monótona creciente o simplemente creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Se dice que la sucesión es monótona decreciente o simplemente decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Se dice que la sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Convergencia y monotonía

Definición

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

1. Se dice que la sucesión es monótona creciente o simplemente creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Se dice que la sucesión es monótona decreciente o simplemente decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Se dice que la sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Proposición

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona de números reales.

1. Si la sucesión es creciente y acotada superiormente entonces es convergente siendo su límite el número real $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si la sucesión es decreciente y acotada inferiormente entonces es convergente siendo su límite el número real $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Progreso

19 horas: 2 horas, viernes 22 de octubre

Hemos llegado hasta el ejemplo siguiente: sucesión definida por recurrencia. Les he indicado cómo se prueba: monótona, acotada y aplicar que existe límite en la fórmula, obteniendo 2 como límite (les he dicho por qué -1 no puede ser). Habría que hacer los detalles.
En las pruebas, he omitido por ejemplo la del límite del cociente, les he dicho que la lean.

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.
2. La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monótona decreciente y acotada.

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.
2. La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monótona decreciente y acotada.
3. $\lim_n a_n = \lim_n b_n =: e$.

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.
2. La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monótona decreciente y acotada.
3. $\lim_n a_n = \lim_n b_n =: e$.
4. El número e también es el límite de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.
2. La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monótona decreciente y acotada.
3. $\lim_n a_n = \lim_n b_n =: e$.
4. El número e también es el límite de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por
$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$
5. El número real e es irracional.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición (Principio del encaje de Cantor)

Sea $\{(I_n)_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que:

1. $I_{n+1} \subset I_n$;
2. la longitud de I_n tiene por límite cero.

Entonces existe un único número real común a todos los intervalos.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición (Principio del encaje de Cantor)

Sea $\{(I_n)_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que:

1. $I_{n+1} \subset I_n$;
2. la longitud de I_n tiene por límite cero.

Entonces existe un único número real común a todos los intervalos.

?

Considere la sucesión de intervalos $I_n = (0, 1/n)$. Calcule $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Analice el resultado a la luz de la proposición anterior. ¿La contradice? ¿Qué ocurre?

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición (Principio del encaje de Cantor)

Sea $\{(I_n)_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que:

1. $I_{n+1} \subset I_n$;
2. la longitud de I_n tiene por límite cero.

Entonces existe un único número real común a todos los intervalos.

?

Considere la sucesión de intervalos $I_n = (0, 1/n)$. Calcule $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Analice el resultado a la luz de la proposición anterior. ¿La contradice? ¿Qué ocurre?

Definición

Sea $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ una sucesión y sea $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ monótona estrictamente creciente. La sucesión $\varphi \circ \tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es una subsucesión de la anterior. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión inicial entonces la subsucesión se denota del siguiente modo $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} := (\varphi \circ \tau(k))_{k\in\mathbb{N}}$.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición

Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición

Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición

Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente.

Proposición

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{C}$ posee una subsucesión convergente.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición

Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente.

Proposición

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{C}$ posee una subsucesión convergente.

Proposición

Si una sucesión acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ tiene la propiedad de que cualquier subsucesión suya que converja tiene por límite un valor fijo $a \in \mathbb{K}$, entonces

$$a = \lim_n a_n.$$

Sucesiones de Cauchy

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ se dice de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si n, m son números naturales verificando $n_0 \leq n$ y $n_0 \leq m$ entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Sucesiones de Cauchy

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ se dice de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si n, m son números naturales verificando $n_0 \leq n$ y $n_0 \leq m$ entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Ejercicio

Las sucesiones

$$a_n = 1/n \quad \text{y} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

son de Cauchy, y las sucesiones

$$a_n = (-1)^n \quad \text{y} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

NO son de Cauchy.

Completitud de $\mathbb{R}$

Proposicion

Sea (a_n) sucesión en $\mathbb{K}$. Entonces:

- Si $(a_n)_n$ es de convergente, $(a_n)_n$ es de Cauchy.
- Si $(a_n)_n$ es de Cauchy, $(a_n)_n$ es acotada.

Completitud de $\mathbb{R}$

Proposicion

Sea (a_n) sucesión en $\mathbb{K}$. Entonces:

- Si $(a_n)_n$ es de convergente, $(a_n)_n$ es de Cauchy.
- Si $(a_n)_n$ es de Cauchy, $(a_n)_n$ es acotada.

Teorema. Completitud de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

Una sucesión en $\mathbb{K}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Progreso

Jueves 3 de Noviembre

Hemos llegado hasta la transparencia anterior y se ha hecho hoy el tercer TEST del curso.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.
3. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe $\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.
3. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe $\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$.
4. S recibe el nombre de suma de la serie y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.
3. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe $\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$.
4. S recibe el nombre de suma de la serie y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
5. La serie se dice divergente si no es convergente.

Convergencia de series

Condición necesaria de convergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces existe $\lim_n a_n$ y vale 0.

Convergencia de series

Condición necesaria de convergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces existe $\lim_n a_n$ y vale 0.

Condición de Cauchy para la convergencia de una serie

La serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se verifica

$$|a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q| < \varepsilon,$$

siempre que los naturales p, q cumplan $n_0 \leq p \leq q$.

Ejemplos de series

Ejercicio

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

con $|r| < 1$ es una serie convergente con suma

$$\frac{1}{1-r}.$$

Si $|r| \geq 1$ la serie es divergente.

Ejemplos de series

Ejercicio

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

con $|r| < 1$ es una serie convergente con suma

$$\frac{1}{1-r}.$$

Si $|r| \geq 1$ la serie es divergente.

Ejercicio

- La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente, ya que sus sumas parciales son una sucesión de Cauchy.

Ejemplos de series

Ejercicio

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

con $|r| < 1$ es una serie convergente con suma

$$\frac{1}{1-r}.$$

Si $|r| \geq 1$ la serie es divergente.

Ejercicio

- La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
es convergente, ya que sus sumas parciales son una sucesión de Cauchy.
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, ya que no satisface el criterio de Cauchy.

Operaciones con series

Proposición

La convergencia de una serie no se altera modificando un número finito de términos de la misma.

Operaciones con series

Proposición

La convergencia de una serie no se altera modificando un número finito de términos de la misma.

Proposición

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes con sumas A, B respectivamente. Entonces para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$$

es convergente y tiene suma $\lambda A + \mu B$.

Series de términos positivos

Series de términos positivos.

Si $\sum_n a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, es monótona creciente.
Por tanto para la convergencia de este tipo de series es suficiente verificar que la sucesión $(S_n)_n$ está acotada superiormente.

Series armónicas

Ejercicio: convergencia de series armónicas

- La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$$
es convergente si $q \geq 2$ (se puede demostrar para $q > 1$);
- La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$$
es divergente si $q \leq 1$.

Criterios de convergencia

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $a_n \leq Mb_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterios de convergencia

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $a_n \leq M b_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos estrictamente positivos y supongamos que existe $l := \lim \frac{a_n}{b_n}$

Criterios de convergencia

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $a_n \leq M b_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos estrictamente positivos y supongamos que existe $l := \lim \dfrac{a_n}{b_n}$

1. Si $0 < l < \infty$ entonces las dos series tienen el mismo carácter.

Criterios de convergencia

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $a_n \leq Mb_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos estrictamente positivos y supongamos que existe $l := \lim \dfrac{a_n}{b_n}$

1. Si $0 < l < \infty$ entonces las dos series tienen el mismo carácter.
2. Si $l = 0$ entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterios de convergencia

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $a_n \leq M b_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos estrictamente positivos y supongamos que existe $l := \lim \dfrac{a_n}{b_n}$

1. Si $0 < l < \infty$ entonces las dos series tienen el mismo carácter.
2. Si $l = 0$ entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.
3. Si $l = \infty$ entonces la convergencia de $\sum a_n$ implica la convergencia de $\sum b_n$.

Criterio de la raíz

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos y sea $\beta = \lim \sqrt[n]{a_n}$.

1. Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.

Criterio de la raíz

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos y sea $\beta = \lim \sqrt[n]{a_n}$.

1. Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.
2. Si $\beta > 1$ entonces la serie diverge.

Criterio de la raíz

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos y sea $\beta = \lim \sqrt[n]{a_n}$.

1. Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.
2. Si $\beta > 1$ entonces la serie diverge.

Ejercicio aplicación del criterio de la raíz

Pruébese utilizando el criterio de la raíz que las series siguientes son convergentes:

1. $$\sum \frac{1}{(\log n)^n}.$$
2. $$\sum \sqrt{n(n+1)2^{-n}}.$$

Criterio del cociente

Criterio del cociente

Si existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ también existe $\lim \sqrt[n]{a_n}$ y valen lo mismo. Luego si existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \beta$, entonces:

1. Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.

Criterio del cociente

Criterio del cociente

Si existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ también existe $\lim \sqrt[n]{a_n}$ y valen lo mismo. Luego si existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \beta$, entonces:

1. Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.
2. Si $\beta > 1$ entonces la serie diverge.

Criterio del cociente

Criterio del cociente

Si existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ también existe $\lim \sqrt[n]{a_n}$ y valen lo mismo. Luego si existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \beta$, entonces:

1. Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.
2. Si $\beta > 1$ entonces la serie diverge.

Ejemplo aplicación del criterio cociente

Estudiar el carácter de convergencia de las series:

1. $\sum \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$.
2. $\sum \frac{x^n}{n!}$ y $\sum \frac{x^n}{n^p}$ con $x \geq 0$.

Series absolutamente convergentes

Definición

La serie $\sum a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ se dice absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Series absolutamente convergentes

Definición

La serie $\sum a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ se dice absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Proposición

Si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces es convergente.

Progreso

Miércoles 3 de noviembre

23 horas globales.
Hemos llegado hasta la transparencia anterior.