Universidad de Murcia

Departamento Matemáticas

# Funciones de una variable real I

B. Cascales y L. Oncina

Universidad de Murcia
http://webs.um.es/beca

Grado en Matemáticas
Curso 2011-2012

## Presentación asignatura

1. Profesores: Bernardo Cascales, Luis Oncina y Matías Raja (otro grupo Teresa Signes);

## Presentación asignatura

1. Profesores: Bernardo Cascales, Luis Oncina y Matías Raja (otro grupo Teresa Signes);
2. Contacto: beca@um.es; luis@um.es; matias@um.es;

## Presentación asignatura

1. Profesores: Bernardo Cascales, Luis Oncina y Matías Raja (otro grupo Teresa Signes);
2. Contacto: beca@um.es; luis@um.es; matias@um.es;
3. Tutorías: L,M,J y V de 13:00 a 14:30 (B. Cascales);

## Presentación asignatura

1. Profesores: Bernardo Cascales, Luis Oncina y Matías Raja (otro grupo Teresa Signes);
2. Contacto: beca@um.es; luis@um.es; matias@um.es;
3. Tutorías: L,M,J y V de 13:00 a 14:30 (B. Cascales);
4. Evaluación: Examen (hasta 10 puntos) y tests (hasta 2 puntos); sólo contarán los tests en los que se obtenga una puntuación al menos de 3 puntos sobre 10;

## Presentación asignatura

1. Profesores: Bernardo Cascales, Luis Oncina y Matías Raja (otro grupo Teresa Signes);
2. Contacto: beca@um.es; luis@um.es; matias@um.es;
3. Tutorías: L,M,J y V de 13:00 a 14:30 (B. Cascales);
4. Evaluación: Examen (hasta 10 puntos) y tests (hasta 2 puntos); sólo contarán los tests en los que se obtenga una puntuación al menos de 3 puntos sobre 10;
5. Trabajo: Hay programados 10 Talleres con Entrega y Evaluación de 2 horas de duración durante 10 Martes.
6. Material en: http://webs.um.es/beca y en OCW UMU Análisis Matemático.
7. Compromisos: Los profesores están comprometidos a mejorar el material y a exponerlo y evaluarlo de forma escalonada con el aprendizaje de los alumnos; los alumnos están comprometidos a trabajar.

# Presentación de la asignatura

- **TEMA 1.**- Números reales y complejos.
- **TEMA 2.**- Sucesiones y series numéricas.
- **TEMA 3.**- Funciones continuas y límites.
- **TEMA 4.**- Derivadas.

# Números reales y complejos

# Objetivos

## Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.

# Objetivos

## Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.

# Objetivos

## Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.

# Objetivos

## Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.

# Objetivos

## Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.
5. Conocer la unicidad de $\mathbb{R}$

# Objetivos

## Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.
5. Conocer la unicidad de $\mathbb{R}$
6. Conocer la representación geométrica de los números reales.

# Objetivos

## Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.
5. Conocer la unicidad de $\mathbb{R}$
6. Conocer la representación geométrica de los números reales.
7. Definir (y entender) los números complejos.

# Objetivos

## Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.
5. Conocer la unicidad de $\mathbb{R}$
6. Conocer la representación geométrica de los números reales.
7. Definir (y entender) los números complejos.
8. Conocer la representación geométrica de los números complejos.

# Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos

# Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,. . .

# Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,. . .
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4. . .

# Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,...
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4...
  - **Racionales** representados con $\mathbb{Q}$
    los cocientes $p/q$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.

# Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,...
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4...
  - **Racionales** representados con $\mathbb{Q}$
    los cocientes $p/q$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.
  - **Reales** representados con $\mathbb{R}$
    son los más complicados y hay varias formas de definirlos
    se corresponden con los «decimales infinitos»
    1,065123123123..., 3,141592653589793...,
    -1,414213562373095

# Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,...
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4...
  - **Racionales** representados con $\mathbb{Q}$
    los cocientes $p/q$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.
  - **Reales** representados con $\mathbb{R}$
    son los más complicados y hay varias formas de definirlos
    se corresponden con los «decimales infinitos»
    1,065123123123..., 3,141592653589793...,
    -1,414213562373095
  - **Complejos** representados con $\mathbb{C}$
    son de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y la $i$ es un símbolo

# Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,...
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4...
  - **Racionales** representados con $\mathbb{Q}$
    los cocientes $p/q$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.
  - **Reales** representados con $\mathbb{R}$
    son los más complicados y hay varias formas de definirlos
    se corresponden con los «decimales infinitos»
    1,065123123123..., 3,141592653589793...,
    -1,414213562373095
  - **Complejos** representados con $\mathbb{C}$
    son de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y la $i$ es un símbolo
  - En la lista anterior cada conjunto incluye a los que le preceden (eventualmente, mediante identificaciones adecuadas de los elementos)

# Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.

# Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

# Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.

# Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.

# Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- La resta es la «operación inversa» de la suma: $a + x = b$.

# Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- La resta es la «operación inversa» de la suma: $a + x = b$.

- El **producto** siempre es posible.

# Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- La resta es la «operación inversa» de la suma: $a + x = b$.

- El **producto** siempre es posible.
- En $\mathbb{Z}$ el **cociente** puede hacerse ciertas parejas. En $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.

# Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- La resta es la «operación inversa» de la suma: $a + x = b$.

- El **producto** siempre es posible.
- En $\mathbb{Z}$ el **cociente** puede hacerse ciertas parejas. En $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- Cociente es la «operación inversa» del producto: $ax = b$.

# Propiedades de suma y producto

| | |
|---|---|
| Conmutativa | $a+b=b+a, \qquad a\times b=b\times a$ |
| Asociativa | $(a+b)+c=a+(b+c)$, <br> $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ |
| Distributiva | $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$ |
| Neutros | suma: el 0 pues $a+0=a$, <br> producto: el 1 pues $a\times 1=a$ |
| Simétricos | suma: simétrico de $a$ es $-a$ pues $a+(-a)=0$, <br> producto: simétrico de $a\neq 0$ es $1/a$ pues $a\times(1/a)=1$ |

En adelante escribiremos $ab$ en lugar de $a\times b$.

- En $\mathbb{C}$ se opera formalmente como en $\mathbb{R}$ y polinomios arbitrarios en el símbolo $i$ con el convenio de que $i^2=-1$

# Definición axiomática de $\mathbb{R}$

**Definición**

Existe un cuerpo totalmente ordenado y completo que recibe el nombre de cuerpo de los números reales y se denota por $\mathbb{R}$.

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (asociativa),

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con $0$ que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $x' \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $x + x' = 0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (conmutativa),

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$

# Explicación: cuerpo

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} & \qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto x+y & \qquad (x,y)\mapsto x\cdot y \end{array}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),
8. para cada $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq 0$ existe $x''\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x\cdot x''=1$, dicho $x''$ se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o $x^{-1}$

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),
8. para cada $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq 0$ existe $x''\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x\cdot x''=1$, dicho $x''$ se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o $x^{-1}$ (inverso),

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),
8. para cada $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq 0$ existe $x''\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x\cdot x''=1$, dicho $x''$ se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o $x^{-1}$ (inverso),
9. $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$

# Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho $x'$ se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),
8. para cada $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq 0$ existe $x''\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x\cdot x''=1$, dicho $x''$ se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o $x^{-1}$ (inverso),
9. $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (distributiva).

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$,

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),
15. $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),
15. $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (compatibilidad del orden con el producto).

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),
15. $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (compatibilidad del orden con el producto).

1. $x \geq y$ significa, por definición, lo mismo que $y \leq x$;

# Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),
15. $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (compatibilidad del orden con el producto).

1. $x \geq y$ significa, por definición, lo mismo que $y \leq x$;
2. si $x \leq y$ siendo $x \neq y$ entonces escribiremos $x < y$ o, indistintamente, $y > x$.

# Explicación: completo

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

# Explicación: completo

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

## Definición: cota superior

Un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq M$, para todo $a \in A$; $M$ se llama una cota superior de $A$.

# Explicación: completo

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

## Definición: cota superior

Un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq M$, para todo $a \in A$; $M$ se llama una cota superior de $A$.

## Definición: supremo

Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de $A$ (y se escribe $\alpha = \sup A$) si $\alpha$ es cota superior de $A$ y además cualquier otra cota superior $M$ de $A$ cumple que $\alpha \leq M$.

# Explicación: completo

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

## Definición: cota superior

Un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq M$, para todo $a \in A$; $M$ se llama una cota superior de $A$.

## Definición: supremo

Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de $A$ (y se escribe $\alpha = \sup A$) si $\alpha$ es cota superior de $A$ y además cualquier otra cota superior $M$ de $A$ cumple que $\alpha \leq M$.

## Supremo

$\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de $A$ si:

1. $x \leq \alpha$, para cada $x \in M$;
2. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in M$ tal que $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.

# Completitud de $\mathbb{R}$

**Completitud**

En $\mathbb{R}$ cada conjunto no vacío acotado superiormente posee una cota superior que es la menor de todas las cotas superiores.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \frac{1}{b} = 1$.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \frac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \frac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \frac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
8. Si $c < 0$ entonces $a \leq b$ y $ac \geq bc$ son equivalentes.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \frac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
8. Si $c < 0$ entonces $a \leq b$ y $ac \geq bc$ son equivalentes.
9. Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot a > 0$; en particular $1 > 0$.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \frac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
8. Si $c < 0$ entonces $a \leq b$ y $ac \geq bc$ son equivalentes.
9. Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot a > 0$; en particular $1 > 0$.
10. $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$.

# Propiedades

## Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
8. Si $c < 0$ entonces $a \leq b$ y $ac \geq bc$ son equivalentes.
9. Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot a > 0$; en particular $1 > 0$.
10. $a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.
11. Si $b > 0$ entonces $a \geq b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b}$.

# Cotas inferiores. Ínfimos

## Definición

Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado inferiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq a$ para todo $a \in A$. Cualquier valor $M$ que cumpla la relación anterior se llama una cota inferior de $A$. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de $A$ y además cumple que $M \leq \alpha$ para cualquier otra cota inferior $M$ de $A$, entonces $\alpha$ se llama ínfimo de $A$ y se denota en la forma $\alpha = inf A$.

# Cotas inferiores. Ínfimos

## Definición

Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado inferiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq a$ para todo $a \in A$. Cualquier valor $M$ que cumpla la relación anterior se llama una cota inferior de $A$. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de $A$ y además cumple que $M \leq \alpha$ para cualquier otra cota inferior $M$ de $A$, entonces $\alpha$ se llama ínfimo de $A$ y se denota en la forma $\alpha = inf A$.

## Proposición

Si en un cuerpo ordenado se verifica el axioma del supremo, entonces todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.

# Números naturales: $\mathbb{N}$

## Definición

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama inductivo si cumple las siguientes condiciones:

- $1 \in I$.
- Si $x \in I$ entonces $x + 1 \in I$.

# Números naturales: $\mathbb{N}$

## Definición

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama inductivo si cumple las siguientes condiciones:

- $1 \in I$.
- Si $x \in I$ entonces $x + 1 \in I$.

## Observación

- $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo.
- La intersección de conjuntos inductivos es inductivo.

# Números naturales: $\mathbb{N}$

## Definición

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama inductivo si cumple las siguientes condiciones:

- $1 \in I$.
- Si $x \in I$ entonces $x + 1 \in I$.

## Observación

- $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo.
- La intersección de conjuntos inductivos es inductivo.

## Definición

Se llama conjunto de los números naturales y se denota con $\mathbb{N}$ al siguiente conjunto

$$\mathbb{N} := \bigcap \{I : \text{ donde } I \text{ es un conjunto inductivo de } \mathbb{R}\}.$$

# Números naturales: $\mathbb{N}$

**Corolario (Método de Inducción)**

Cualquier subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ que satisfaga las siguientes propiedades

1. $1 \in S$,
2. si $n \in S$ entonces $n + 1 \in S$,

verifica que $S = \mathbb{N}$.

# Números naturales: $\mathbb{N}$

**Corolario (Método de Inducción)**

Cualquier subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ que satisfaga las siguientes propiedades

1. $1 \in S$,
2. si $n \in S$ entonces $n + 1 \in S$,

verifica que $S = \mathbb{N}$.

Los primeros elementos de $\mathbb{N}$ se denotan de la siguiente manera:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $10 = 9 + 1$ | $20 = 19 + 1$ | ... | $100 = 99 + 1$ | ... |
| $1$ | $11 = 10 + 1$ | $21 = 20 + 1$ | | $101 = 100 + 1$ | |
| $2 = 1 + 1$ | $12 = 11 + 1$ | $22 = 21 + 1$ | | $102 = 101 + 1$ | |
| $3 = 2 + 1$ | $13 = 12 + 1$ | $23 = 22 + 1$ | | $103 = 102 + 1$ | |
| $4 = 3 + 1$ | $14 = 13 + 1$ | $24 = 23 + 1$ | | $104 = 103 + 1$ | |
| $5 = 4 + 1$ | $15 = 14 + 1$ | $25 = 24 + 1$ | | $105 = 104 + 1$ | |
| $6 = 5 + 1$ | $16 = 15 + 1$ | $26 = 25 + 1$ | | $106 = 105 + 1$ | |
| $7 = 6 + 1$ | $17 = 16 + 1$ | $27 = 26 + 1$ | | $107 = 106 + 1$ | |
| $8 = 7 + 1$ | $18 = 17 + 1$ | $28 = 27 + 1$ | | $108 = 107 + 1$ | |
| $9 = 8 + 1$ | $19 = 18 + 1$ | $29 = 28 + 1$ | | $109 = 108 + 1$ | |

# Método de inducción

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales.

# Método de inducción

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales.

**Ejemplo**

Para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que $4^n > n^2$.

# Método de inducción

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales.

## Ejemplo

Para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que $4^n > n^2$.

## Ejemplo

Para cualquier número natural $n \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ se tiene que $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

# Método de inducción

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales.

**Ejemplo**

Para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que $4^n > n^2$.

**Ejemplo**

Para cualquier número natural $n \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ se tiene que $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

**Observación**

1. La formulación del método de inducción tiene dos propiedades. A) $1 \in S$ B) si $n \in S$ entonces $n+1 \in S$.
2. Si $S \subset \mathbb{N}$ es tal que $N \in S$ y $n \in S$ entonces $n+1 \in S$, entonces $S = \{N, N+1, N+2, \dots\}$.

# Método de inducción

## Corolario, Método de inducción, versión fuerte

Sea $S \subset \mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $1 \in S$
2. si $1, 2, \ldots, n \in S$ entonces $n + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}$. Leer en clase

# Método de inducción

## Corolario, Método de inducción, versión fuerte

Sea $S \subset \mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $1 \in S$
2. si $1, 2, \ldots, n \in S$ entonces $n + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}$.  Leer en clase

## Ejemplo, Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número entero $n \geq 2$ es primo o producto de sus factores primos.

# Enteros, racionales y propiedad arquimediana

## Definición

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ están definidos del siguiente modo:

1. $\mathbb{Z} := \{0\} \bigcup \{n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ \text{o bien}\ -n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathbb{Q} := \{m \cdot \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. El número real $m \cdot \frac{1}{n}$ se denota indistintamente como $\frac{m}{n}$ o como $m/n$.

# Enteros, racionales y propiedad arquimediana

## Definición

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ están definidos del siguiente modo:

1. $\mathbb{Z} := \{0\} \bigcup \{n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, \text{ o bien } -n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathbb{Q} := \{m \cdot \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. El número real $m \cdot \frac{1}{n}$ se denota indistintamente como $\frac{m}{n}$ o como $m/n$.

## Ejercicio

- probar que si $m, n \in \mathbb{N}$ entonces $m + n \in \mathbb{N}$;
- probar que $\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano para la suma inducida por $\mathbb{R}$;
- probar que $\mathbb{Q}$ es un un cuerpo con las operaciones inducidas por $\mathbb{R}$.

# Enteros, racionales y propiedad arquimediana

## Definición

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ están definidos del siguiente modo:

1. $\mathbb{Z} := \{0\} \bigcup \{n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, \text{ o bien } -n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathbb{Q} := \{m \cdot \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. El número real $m \cdot \frac{1}{n}$ se denota indistintamente como $\frac{m}{n}$ o como $m/n$.

## Ejercicio

- probar que si $m, n \in \mathbb{N}$ entonces $m + n \in \mathbb{N}$;
- probar que $\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano para la suma inducida por $\mathbb{R}$;
- probar que $\mathbb{Q}$ es un un cuerpo con las operaciones inducidas por $\mathbb{R}$.

## Proposición

El cuerpo $\mathbb{R}$ tiene la propiedad arquimediana, es decir, dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $0 < y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$.

# Enteros, racionales y propiedad arquimediana

## Proposición

- $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.
- $\mathbb{Z}$ no está acotado ni superior ni inferiormente.

# Enteros, racionales y propiedad arquimediana

**Proposición**

- $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.
- $\mathbb{Z}$ no está acotado ni superior ni inferiormente.

**Proposición**

Todo subconjunto no vacío $A$ de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

# Enteros, racionales y propiedad arquimediana

## Proposición

- $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.
- $\mathbb{Z}$ no está acotado ni superior ni inferiormente.

## Proposición

Todo subconjunto no vacío $A$ de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

## Proposición

Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero $m$ que verifica $m \leq x < m + 1$.

# Enteros, racionales y propiedad arquimediana

## Proposición

- $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.
- $\mathbb{Z}$ no está acotado ni superior ni inferiormente.

## Proposición

Todo subconjunto no vacío $A$ de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

## Proposición

Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero $m$ que verifica $m \leq x < m+1$.

## Definición

Sea $x \in \mathbb{R}$, el único número entero $m$ que verifica

$$m \leq x < m+1$$

se llama parte entera de $x$ y se denota con $[x]$, es decir $[x] := m$.

## Hora 7 de clase: 29 de septiembre

- Semana del 12-16 Septiembre, sin clases: se cedieron para el curso de iniciación.
- Semana del 19-23 Septiembre, 3 horas: el Viernes se cedió a *Conjuntos y Números*.
- Semana del 26-30 Septiembre, 4 horas: 1 la dio el Prof. M. Raja por viaje iMath B. Cascales.

Hemos explicado hasta la transparencia anterior. Haciendo énfasis en: la necesidad de construir los reales para que las sucesiones de Cauchy sean convergentes. Se les ha hablado de iteraciones de $\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ empezando en 1 para ver que el método iterativo da la $\sqrt{2}$.

# Densidad en $\mathbb{R}$

**Teorema**

*Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

# Densidad en $\mathbb{R}$

**Teorema**

*Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

**Teorema**

*Existe un número $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\alpha^2 = 2$. Además* $\alpha = \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\}$

# Densidad en $\mathbb{R}$

**Teorema**

*Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

**Teorema**

*Existe un número $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\alpha^2 = 2$. Además* $\alpha = \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\}$

**Lema**

Si $0 < r \in \mathbb{Q}$ cumple $r^2 < 2$, entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t$ y $r^2 < t^2 < 2$.
Si $0 < s \in \mathbb{Q}$ cumple $s^2 > 2$, entonces existe $w \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < w < s$ y $s^2 > w^2 > 2$.
Además, ambas afirmaciones son ciertas si $r$ y $s$ no son racionales.

## Densidad en $\mathbb{R}$

**Teorema**

*Si* $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, *entonces existe* $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *tal que* $x < z < y$.

# Densidad en $\mathbb{R}$

**Teorema**

*Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.*

**Corolario**

Cada elemento $x \in \mathbb{R}$ es el supremo del conjunto de números racionales que son menores que él, es decir, $x = \sup\{r : r \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x\}$.

# El valor absoluto

## Definición

$$|x| := \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

## Teorema

*Para cada par de elementos $x, y$ de $\mathbb{R}$ se cumplen:*

- $|x| = |-x| \geq 0 \quad y \quad |x| > 0 \ si \ x \neq 0.\ |x| = max\ \{x, -x\}$
- $|xy| = |x||y|. \qquad |\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}.$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad triangular).*
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

# Distancia

## Definición de distancia

Si $x$ e $y$ son números reales se llama distancia de $x$ a $y$ al número real $d(x, y) := |x - y|$.

# Distancia

## Definición de distancia

Si $x$ e $y$ son números reales se llama distancia de $x$ a $y$ al número real $d(x, y) := |x - y|$.

## Propiedades

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

# Raíces n-ésimas

## Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, y sea $p \in \mathbb{N}$.

1. Si $r \in \mathbb{R}, r > 0$ cumple $r^p < x$ entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t$ y $r^p < t^p < x$
2. Si $s \in \mathbb{R}, s > 0$ cumple $s^p > x$ entonces existe $w \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < w < s$ y $s^p > w^p > x$.
3. Existe un único número real positivo $\alpha$ tal que $\alpha^p = x$. De hecho $\alpha = \sup\{r : \ r \in \mathbb{Q}, r^p < x\}$

# Raíces n-ésimas

## Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, y sea $p \in \mathbb{N}$.

1. Si $r \in \mathbb{R}, r > 0$ cumple $r^p < x$ entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t$ y $r^p < t^p < x$
2. Si $s \in \mathbb{R}, s > 0$ cumple $s^p > x$ entonces existe $w \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < w < s$ y $s^p > w^p > x$.
3. Existe un único número real positivo $\alpha$ tal que $\alpha^p = x$. De hecho $\alpha = \sup\{r : \ r \in \mathbb{Q}, r^p < x\}$

## Definición

Para cada $x \in \mathbb{R}, x > 0$ y cada $p \in \mathbb{N}$, se define la raíz $p$-ésima de $x$ como el único número real positivo $\alpha$ tal que $\alpha^p = x$. Se denota $x^{\frac{1}{p}} := \sqrt[p]{x} := \alpha = \sup\{r : r \in \mathbb{Q}, r^p < x\}$.

# Existencia y unicidad de $\mathbb{R}$

**Teorema**

Existe un único (salvo isomorfismo de cuerpos ordenados) cuerpo ordenado y completo.

# Los números complejos

## Definición

Definimos $\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. La suma y el producto se definen mediante las fórmulas:
$(a, bi) + (c, d) := (a + c, b + d)$
$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$

# Los números complejos

## Definición

Definimos $\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. La suma y el producto se definen mediante las fórmulas:
$(a, bi) + (c, d) := (a + c, b + d)$
$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$

## Proposición

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo no ordenado que contiene a $\mathbb{R}$ como subcuerpo mediante la identificación $a \equiv (a, 0)$ para cada $a \in \mathbb{R}$.

# Los números complejos

**La unidad imaginaria: $i$**

Llamamos $i = (0, 1)$. Con las identificaciones anteriores $i^2 = -1$, y por tanto en $\mathbb{C}$ tiene solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$. De hecho $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebráicamente cerrado.

# Los números complejos

## La unidad imaginaria: $i$

Llamamos $i = (0, 1)$. Con las identificaciones anteriores $i^2 = -1$, y por tanto en $\mathbb{C}$ tiene solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$. De hecho $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebráicamente cerrado.

## Observación

Utilizando las identificaciones anteriores se puede escribir $\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$. La suma y el producto se reescriben como mediante las fórmulas:

$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$

# Los números complejos

## La unidad imaginaria: $i$

Llamamos $i = (0, 1)$. Con las identificaciones anteriores $i^2 = -1$, y por tanto en $\mathbb{C}$ tiene solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$. De hecho $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebráicamente cerrado.

## Observación

Utilizando las identificaciones anteriores se puede escribir $\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$. La suma y el producto se reescriben como mediante las fórmulas:

$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$

# Propiedades en $\mathbb{C}$

## Definición: Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$a$ se llama parte real de $z$, $a = Rez$; $b$ se llama parte imaginaria de $z$, $b = Imz$.
El número real no negativo $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ se denomina módulo de $z$. El número $\overline{z} = a - bi$ recibe el nombre de conjugado de $z$.

## Propiedades: Sean $z, w \in \mathbb{C}$

- $Rez = \frac{z+\overline{z}}{2}$; $Imz = \frac{z-\overline{z}}{2i}$; $|z|^2 = z\overline{z}$.
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$; $\overline{(1/z)} = 1/\overline{z}$, si $z \neq 0$.
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. $|Rez| \leq |z|$; $|Imz| \leq |z|$.
- $|zw| = |z||w|$; $||z| - |w|| \leq |z - w|$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ y la igualdad ocurre si y sólo si $w = cz$ con $c \geq 0$.

# Propiedades en $\mathbb{C}$

## Representación Geométrica de los Números Complejos

$$a = |z| \cos\omega, \quad b = |z| \operatorname{sen}\omega; \text{ y por tanto, } z = |z|(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$$

Este forma de representar geométricamente a $z$ usando el *módulo* $|z|$ y el *argumento* (ángulo) $\omega$ se conoce con el nombre de representación *módulo argumental* del complejo $z$.

## Producto de números complejos

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|(\cos(\omega_1 + \omega_2) + i \sin(\omega_1 + \omega_2))$$

## Raíces de números complejos

Las $n$ raíces $n$-ésimas de $z$ son los números complejos que tienen por módulo el valor de la raíz $n$-ésima del módulo de $z$ y por argumentos los valores:

$$\alpha = \frac{\omega}{n}, \frac{\omega + 2\pi}{n}, \frac{\omega + 4\pi}{n}, \frac{\omega + 6\pi}{n}, \dots, \frac{\omega + 2(n-1)\pi}{n}$$

El material electrónico relacionado puede obtenerse en:

J. M. Mira; B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño
http://ocw.um.es/ciencias/analisis-matematico-i