Universidad de Murcia | Departamento Matemáticas

Funciones de Una Variable Real I: Límites funcionales y continuidad

B. Cascales y L. Oncina

Universidad de Murcia
http://webs.um.es/beca

Grado en Matemáticas
Curso 2011-2012

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.
2. Entender la condición de Cauchy para límite funcional.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.
2. Entender la condición de Cauchy para límite funcional.
3. Relacionar los límites funcionales con los límites de sucesiones.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.
2. Entender la condición de Cauchy para límite funcional.
3. Relacionar los límites funcionales con los límites de sucesiones.
4. Conocer algunos ejemplos de límites relevantes.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.
2. Entender la condición de Cauchy para límite funcional.
3. Relacionar los límites funcionales con los límites de sucesiones.
4. Conocer algunos ejemplos de límites relevantes.
5. Entender y aplicar los límites laterales.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.
2. Entender la condición de Cauchy para límite funcional.
3. Relacionar los límites funcionales con los límites de sucesiones.
4. Conocer algunos ejemplos de límites relevantes.
5. Entender y aplicar los límites laterales.
6. Manipular expresiones involucrando límites. Resolver ejercicios que involucran límites.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.
2. Entender la condición de Cauchy para límite funcional.
3. Relacionar los límites funcionales con los límites de sucesiones.
4. Conocer algunos ejemplos de límites relevantes.
5. Entender y aplicar los límites laterales.
6. Manipular expresiones involucrando límites. Resolver ejercicios que involucran límites.
7. Entender el concepto de continuidad: conocer la continuidad de las funciones clásicas.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.
2. Entender la condición de Cauchy para límite funcional.
3. Relacionar los límites funcionales con los límites de sucesiones.
4. Conocer algunos ejemplos de límites relevantes.
5. Entender y aplicar los límites laterales.
6. Manipular expresiones involucrando límites. Resolver ejercicios que involucran límites.
7. Entender el concepto de continuidad: conocer la continuidad de las funciones clásicas.
8. Conocer y demostrar los teoremas de Weierstrass, Bolzano y de los valores intermedidos.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.
2. Entender la condición de Cauchy para límite funcional.
3. Relacionar los límites funcionales con los límites de sucesiones.
4. Conocer algunos ejemplos de límites relevantes.
5. Entender y aplicar los límites laterales.
6. Manipular expresiones involucrando límites. Resolver ejercicios que involucran límites.
7. Entender el concepto de continuidad: conocer la continuidad de las funciones clásicas.
8. Conocer y demostrar los teoremas de Weierstrass, Bolzano y de los valores intermedidos.
9. Conocer la relación entre monotonía y continuidad.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de límite funcional.
2. Entender la condición de Cauchy para límite funcional.
3. Relacionar los límites funcionales con los límites de sucesiones.
4. Conocer algunos ejemplos de límites relevantes.
5. Entender y aplicar los límites laterales.
6. Manipular expresiones involucrando límites. Resolver ejercicios que involucran límites.
7. Entender el concepto de continuidad: conocer la continuidad de las funciones clásicas.
8. Conocer y demostrar los teoremas de Weierstrass, Bolzano y de los valores intermedidos.
9. Conocer la relación entre monotonía y continuidad.
10. Comprender el concepto de función uniformemente continua.

Funciones elementales: potencias de exponentes enteros

Definición

Cuando $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, con a^n se denota el producto de a por sí mismo n-veces.

Funciones elementales: potencias de exponentes enteros

Definición

Cuando $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, con a^n se denota el producto de a por sí mismo n-veces.

Proposición

Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

1. $a^{n+m} = a^n a^m$.
2. $(ab)^n = a^n b^n$.
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.
4. • Si $a > 1$ y $n < m$, entonces $a^n < a^m$.
   • Si $a < 1$ y $n < m$, entonces $a^n > a^m$.
5. • Si $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces $a^n < b^n$.

Funciones elementales: potencias de exponentes enteros

Definición

Cuando $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, con a^n se denota el producto de a por sí mismo n-veces.

Proposición

Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

1. $a^{n+m} = a^n a^m$.
2. $(ab)^n = a^n b^n$.
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.
4.
   - Si $a > 1$ y $n < m$, entonces $a^n < a^m$.
   - Si $a < 1$ y $n < m$, entonces $a^n > a^m$.
5.
   - Si $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces $a^n < b^n$.

Definición

La definición de a^n puede extenderse para $n \in \mathbb{Z}$ definiendo $a^0 := 1$ y $a^n = 1/a^{-n}$ si n es un entero negativo.

Funciones elementales: potencias de exponentes racionales

Definición

- Dado un real positivo a y $n \in \mathbb{N}$ existe un único real positivo b denotado como $\sqrt[n]{b}$ que cumple $b^n = a$ y que recibe el nombre de raíz n-ésima de a. Definimos entonces $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$.

Funciones elementales: potencias de exponentes racionales

Definición

- Dado un real positivo a y $n \in \mathbb{N}$ existe un único real positivo b denotado como $\sqrt[n]{b}$ que cumple $b^n = a$ y que recibe el nombre de raíz n-ésima de a. Definimos entonces $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$.
- Se define $a^{\frac{m}{n}}$ donde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mediante la fórmula

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Funciones elementales: potencias de exponentes racionales

Definición

- Dado un real positivo a y $n \in \mathbb{N}$ existe un único real positivo b denotado como $\sqrt[n]{b}$ que cumple $b^n = a$ y que recibe el nombre de raíz n-ésima de a. Definimos entonces $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$.
- Se define $a^{\frac{m}{n}}$ donde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mediante la fórmula

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Nota

Si $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ entonces se cumple que

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{p}{q}},$$

con lo que queda unívocamente definido a^r para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Funciones elementales: potencias de exponentes racionales

Proposición

Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ y a, b reales estrictamente mayores que cero.

1. $a^{r+s} = a^r a^s$.
2. $(ab)^r = a^r b^r$.
3. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4. - Si $a > 1$ y $r < s$, entonces $a^r < a^s$.
   - Si $0 < a < 1$ y $r < s$, entonces $a^r > a^s$.
5. - Si $0 < a < b$ y $r > 0$, entonces $a^r < b^r$.
   - Si $0 < a < b$ y $r < 0$, entonces $a^r > b^r$.

Funciones elementales: potencias de exponentes reales

Proposición

Si a es un número real positivo entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$;
2. para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^r - 1| < \varepsilon$ para cada racional r que cumpla $0 < r \leq 1/n_0$.

Funciones elementales: potencias de exponentes reales

Proposición

Si a es un número real positivo entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$;
2. para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^r - 1| < \varepsilon$ para cada racional r que cumpla $0 < r \leq 1/n_0$.

Proposición

1. Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales con límite x, entonces existe $\lim\limits_{n} a^{r_n}$.
2. El límite anterior es independiente de la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Funciones elementales: potencias de exponentes reales

Proposición

Si a es un número real positivo entonces:

1. $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$;
2. para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^r - 1| < \varepsilon$ para cada racional r que cumpla $0 < r \leq 1/n_0$.

Proposición

1. Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales con límite x, entonces existe $\lim_n a^{r_n}$.
2. El límite anterior es independiente de la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición

Si $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ se define $a^x := \lim_n a^{r_n}$, donde $(r_n)_n$ es cualquier sucesión de racionales convergente a x.

Funciones elementales: potencias de exponentes reales

Proposición

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $a, b > 0$.

1. $a^{x+y} = a^x a^y$.
2. $(ab)^x = a^x b^x$.
3. $(a^x)^y = a^{xy}$.
4. • Si $a > 1$ y $x < y$, entonces $a^x < a^y$ (la función a^x es creciente si $a > 1$).
   • Si $0 < a < 1$ y $x < y$, entonces $a^x > a^y$ (a^x es decreciente si $a < 1$).
5. • Si $0 < a < b$ y $x > 0$, entonces $a^x < b^x$.
   • Si $0 < a < b$ y $x < 0$, entonces $a^x > b^x$.
6. Si $(x_n)_n$ converge a x entonces $\lim a^{x_n} = a^x$.
7. • Si $a > 1$, para cada $k \in \mathbb{R}$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x > t$ implica $a^x > k$ (a^x no está acotada superiormente si $a > 1$).
   • Si $a < 1$ para cada $\varepsilon > 0$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x > t$ implica $a^x < \varepsilon$ (a^x tiene ínfimo 0 si $a < 1$).

La función logaritmo

Proposición

Si $0 < a \neq 1$ y $x > 0$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $a^y = x$.

La función logaritmo

Proposición

Si $0 < a \neq 1$ y $x > 0$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $a^y = x$.

Definición

Para $a > 0$, $a \neq 1$, y $x > 0$, se llama logaritmo en base a de x al único número real y que satisface la ecuación $a^y = x$. Se escribe $\log_a x := y$. Cuando $a = e$ se llama logaritmo neperiano y se denota simplemente con $\log x$.

La función logaritmo

Proposición

La función logaritmo en base a tiene las siguientes propiedades:

1. • Es una función estrictamente creciente cuando $a > 1$, es decir, si $0 < x < y$ entonces $\log_a x < \log_a y$;
   • Es una función estrictamente decreciente cuando $a < 1$, es decir, si $0 < x < y$ entonces $\log_a x > \log_a y$;
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.
3. $\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$.
4. $\log_a x^z = z \log_a x$.
5. Si $\lim_n x_n = x$ con $x_n > 0$ y $x > 0$ entonces $\lim_n \log_a x_n = \log_a x$.

siendo x, y, z números reales, con $x > 0$, $y > 0$.

Progreso

Viernes 12 de noviembre

- El Viernes 5 se hizo un taller con entrega y evaluación.
- Lunes y Miércoles, 8 y 9 se insistió en el concepto de función continua y en particular se analizaron las funciones exponencial y logaritmo.
- El Viernes 12 no hubo clase.

Funciones

Consideraremos funciones

$$f : D \longrightarrow F$$

definidas en un conjunto D (llamado dominio o conjunto inicial) que toman valores en un conjunto F (llamado conjunto final) entendiendo por tal una correspondencia, del tipo que sea, que permite asignar a cada elemento $x \in D$ un *único* punto $f(x) \in F$.

Funciones

Consideraremos funciones

$$f : D \longrightarrow F$$

definidas en un conjunto D (llamado dominio o conjunto inicial) que toman valores en un conjunto F (llamado conjunto final) entendiendo por tal una correspondencia, del tipo que sea, que permite asignar a cada elemento $x \in D$ un *único* punto $f(x) \in F$.

Nota

En sentido estricto la función es la terna (D, F, f) y un cambio en alguno de los elementos significa cambiar la función.

Terminología:

1. $\overline{\mathbb{R}}$ la denominada recta real ampliada, obtenida adjuntado a $\mathbb{R}$ los símbolos del infinito, es decir, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Terminología:

1. $\overline{\mathbb{R}}$ la denominada recta real ampliada, obtenida adjuntado a $\mathbb{R}$ los símbolos del infinito, es decir, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
2. Por intervalo I de extremos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ entenderemos cualquiera de los siguientes intervalos:

$$[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b)$$

$$(-\infty, +\infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (a, +\infty),\ [a, +\infty).$$

Terminología:

1. $\overline{\mathbb{R}}$ la denominada recta real ampliada, obtenida adjuntado a $\mathbb{R}$ los símbolos del infinito, es decir, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
2. Por intervalo I de extremos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ entenderemos cualquiera de los siguientes intervalos:

$$[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b)$$

$$(-\infty, +\infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (a, +\infty),\ [a, +\infty).$$

3. Se llama bola abierta de centro $x \in \mathbb{K}$ y radio $r > 0$ al siguiente conjunto

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{K} : |y - x| < r\}.$$

Terminología:

1. $\overline{\mathbb{R}}$ la denominada recta real ampliada, obtenida adjuntado a $\mathbb{R}$ los símbolos del infinito, es decir, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
2. Por intervalo I de extremos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ entenderemos cualquiera de los siguientes intervalos:
$$[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b)$$
$$(-\infty, +\infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (a, +\infty),\ [a, +\infty).$$
3. Se llama bola abierta de centro $x \in \mathbb{K}$ y radio $r > 0$ al siguiente conjunto
$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{K} : |y - x| < r\}.$$

Definición

1. Se dice que V es un entorno de $x \in \mathbb{K}$ si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset V$.
2. Si A es un subconjunto de $\mathbb{K}$ diremos que x es un punto de acumulación de A si para cada $r > 0$ el conjunto $B(x, r) \cap A$ contiene al menos un punto diferente de x.

Ejemplos

1. Si $A = [0, 1]$ entonces cada punto $x \in A$ es de acumulación de A.
2. Si $A = (0, 1)$ entonces cada punto $x \in [0, 1]$ es de acumulación de A.
3. Si $A = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ entonces 0 es un punto de acumulación de A; y de hecho es el único.
4. Si $A = \mathbb{N}$ entonces A no tiene puntos de acumulación.

Ejemplos

1. Si $A = [0, 1]$ entonces cada punto $x \in A$ es de acumulación de A.
2. Si $A = (0, 1)$ entonces cada punto $x \in [0, 1]$ es de acumulación de A.
3. Si $A = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ entonces 0 es un punto de acumulación de A; y de hecho es el único.
4. Si $A = \mathbb{N}$ entonces A no tiene puntos de acumulación.

Nota

Si x es un punto de acumulación de A, x puede o no pertenecer a A, pero en todo caso, existe una sucesión $(x_n)_n \subset A$ con $x_n \neq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $x = \lim_n x_n$.

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si c es punto de acumulación de D se dice que L es el límite de f en c, y se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$ si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si c es punto de acumulación de D se dice que L es el límite de f en c, y se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$ si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nota

- Una formulación equivalente con el lenguaje de bolas es la siguiente: para cada bola $B(L, \varepsilon)$ existe una bola $B(c, \delta)$ tal que $f((B(c, \delta) \cap D) \setminus \{c\})) \subset B(L, \varepsilon)$.

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si c es punto de acumulación de D se dice que L es el límite de f en c, y se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$ si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nota

- Una formulación equivalente con el lenguaje de bolas es la siguiente: para cada bola $B(L, \varepsilon)$ existe una bola $B(c, \delta)$ tal que $f((B(c, \delta) \cap D) \setminus \{c\})) \subset B(L, \varepsilon)$.
- Simbólicamente la anterior definición de límite la escribiríamos en la forma:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \; \left(0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$

Proposición

Sean $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $L = \lim_{x \to c} f(x)$.
2. Para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica $L = \lim_n f(x_n)$.

Proposición

Sean $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $L = \lim_{x \to c} f(x)$.
2. Para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica $L = \lim_n f(x_n)$.

Proposición

Si existe el límite de una función en un punto, entonces es único.

Proposición

Sean $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $L = \lim_{x \to c} f(x)$.
2. Para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica $L = \lim_n f(x_n)$.

Proposición

Si existe el límite de una función en un punto, entonces es único.

Condición de Cauchy

Sean $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe $\lim_{x \to c} f(x) := L \in \mathbb{K}$
2. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in B(c, \delta) \setminus \{c\}$ se verifica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Progreso

Lunes 15 de noviembre

Se llegó hasta la transparencia anterior.

Proposición

Sean f, g funciones de $D \subset \mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D tales que existen

$$L_1 = \lim_{x \to c} f(x) \in \mathbb{K}, \quad \text{y} \quad L_2 = \lim_{x \to c} g(x) \in \mathbb{K}.$$

Entonces:

1. Existe $\lim_{x \to c} f(x) + g(x)$ y vale $L_1 + L_2$.
2. Existe $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x)$ y vale $L_1 \cdot L_2$
3. Si $L_2 \neq 0$ existe $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y vale $\dfrac{L_1}{L_2}$.
4. Si además las funciones toman valores en $\mathbb{R}$ se cumplen las dos propiedades siguientes:
   - Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$ se verifica que $L_1 \leq L_2$.
   - Si h es otra función de D en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ en D y además $L_1 = L_2 = L$, también se verifica que $L = \lim_{x \to c} h(x)$.

Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en c.

Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en c.
2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en c.

Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en c.
2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en c.
3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene por límite $\sqrt[4]{c}$ en c y algo análogo ocurre con cualquier raíz k-ésima.

Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en c.
2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en c.
3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene por límite $\sqrt[4]{c}$ en c y algo análogo ocurre con cualquier raíz k-ésima.
4. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$ tiene por límite $\sin c$ en c.

Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en c.
2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en c.
3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene por límite $\sqrt[4]{c}$ en c y algo análogo ocurre con cualquier raíz k-ésima.
4. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$ tiene por límite $\sin c$ en c.
5. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ tiene por límite e^c en c.

Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en c.
2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en c.
3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene por límite $\sqrt[4]{c}$ en c y algo análogo ocurre con cualquier raíz k-ésima.
4. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$ tiene por límite $\sin c$ en c.
5. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ tiene por límite e^c en c.
6. La función $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$ tiene por límite $\log c$ en $c \in (0, \infty)$.

Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en c.
2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en c.
3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene por límite $\sqrt[4]{c}$ en c y algo análogo ocurre con cualquier raíz k-ésima.
4. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$ tiene por límite $\sin c$ en c.
5. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ tiene por límite e^c en c.
6. La función $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$ tiene por límite $\log c$ en $c \in (0, \infty)$.
7. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ tiene por límite $[c]$ si $c \notin \mathbb{Z}$ y no tiene límite si $c \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en c.
2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en c.
3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene por límite $\sqrt[4]{c}$ en c y algo análogo ocurre con cualquier raíz k-ésima.
4. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$ tiene por límite $\sin c$ en c.
5. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ tiene por límite e^c en c.
6. La función $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$ tiene por límite $\log c$ en $c \in (0, \infty)$.
7. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ tiene por límite $[c]$ si $c \notin \mathbb{Z}$ y no tiene límite si $c \in \mathbb{Z}$.
8. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(1/x)$ no tiene límite para $c = 0$.

Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en c.
2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en c.
3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene por límite $\sqrt[4]{c}$ en c y algo análogo ocurre con cualquier raíz k-ésima.
4. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$ tiene por límite $\sin c$ en c.
5. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ tiene por límite e^c en c.
6. La función $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$ tiene por límite $\log c$ en $c \in (0, \infty)$.
7. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ tiene por límite $[c]$ si $c \notin \mathbb{Z}$ y no tiene límite si $c \in \mathbb{Z}$.
8. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(1/x)$ no tiene límite para $c = 0$.
9. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \sin(1/x)$ tiene por límite 0 para $c = 0$.

Progreso

Miércoles 17 de noviembre

Se llegó hasta la transparencia anterior.

Hasta ahora hemos considerado que c y L son números reales o complejos, pero es posible ampliar la definición de límite para que incluir también los casos en que c o L sean $\pm\infty$.
Concretemos.

Definición

1. Si $f(x)$ es una función definida en un intervalo de la forma $(a, +\infty)$, decir que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in (a, +\infty)$ y $x > k$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
2. Si $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y c es un punto de acumulación de D diremos que $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ si (en términos de entornos): para cada entorno de $+\infty$, $(k, +\infty)$, existe una bola $B(c, \delta)$ tal que $f(B(c, \delta) \cap D \setminus \{c\}) \subset (k, +\infty)$.

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de D.

1. Se llama límite por la derecha de f en c y se denota con $f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x)$ al límite de la función

$$g : D \cap (c, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

en c, supuesto que c sea un punto de acumulación del dominio de g, siendo g la restricción de f a $D \cap (c, +\infty)$.

2. Se llama límite por la izquierda de f en c y se denota con $f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x)$ al límite de la función

$$g : D \cap (-\infty, c) \longrightarrow \mathbb{R}$$

en c, supuesto que c sea un punto de acumulación del dominio de g, siendo g la restricción de f a $D \cap (-\infty, c)$.

Notación

- $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$, si $0 < x - c < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$, si $0 < c - x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Notación

- $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$, si $0 < x - c < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$, si $0 < c - x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplos

1. $f(x) = [x]$ tiene límite por la izquierda en cada entero c que vale $c - 1$ y límite por la derecha que vale c.
2. $f(x) = \sin(1/x)$, $x \neq 0$, no tiene límites laterales en $x = 0$.
3. $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, verifica que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
4. La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, tiene por límite $+\infty$ en $x = 0$.
5. $f(x) = e^{-(1/x)}$, $x \neq 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.
6. Para la función $f(x) = e^{-(1/x^2)}$, $x \neq 0$, se verifica que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y sea $c \in D$. Se dice que f es continua en c si para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y sea $c \in D$. Se dice que f es continua en c si para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Nota

1. Si $c \in D$ es un punto de acumulación de D, lo anterior equivale a que $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$.
2. Si c no es un punto de acumulación de D (es lo que se llama un *punto aislado* de D) entonces la condición anterior se cumple trivialmente.

Proposición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y sea $c \in D$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. f es continua en c.
2. Para cada sucesión $(x_n)_n \subset D$ con $c = \lim_n x_n$ se tiene $f(c) = \lim_n f(x_n)$.

Proposición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y sea $c \in D$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. f es continua en c.
2. Para cada sucesión $(x_n)_n \subset D$ con $c = \lim_n x_n$ se tiene $f(c) = \lim_n f(x_n)$.

Nota

La continuidad de f es equivalente a la conmutatividad entre f y la operación de tomar límites, es decir, que:

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Proposición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y sea $c \in D$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. f es continua en c.
2. Para cada sucesión $(x_n)_n \subset D$ con $c = \lim_n x_n$ se tiene $f(c) = \lim_n f(x_n)$.

Nota

La continuidad de f es equivalente a la conmutatividad entre f y la operación de tomar límites, es decir, que:

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Proposición

Sean f, g funciones de $D \subset \mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ continuas en un punto $c \in D$. Entonces:

1. La función $f + g$ es continua en c.
2. La función fg es continua en c.
3. Si g no se anula en D entonces f/g es continua en c.

Nota

En el último apartado de la proposición precedente bastaría, en realidad, con que $g(c) \neq 0$, porque en tal caso existe un entorno de c en el que g no se anula.

Nota

En el último apartado de la proposición precedente bastaría, en realidad, con que $g(c) \neq 0$, porque en tal caso existe un entorno de c en el que g no se anula.

Proposición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ una función continua en $c \in D$. Si $f(c) \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in B(c, \delta)$. Además si f toma valores en $\mathbb{R}$ entonces el signo de $f(x)$ es el mismo en todos los $x \in B(c, \delta)$.

Nota

En el último apartado de la proposición precedente bastaría, en realidad, con que $g(c) \neq 0$, porque en tal caso existe un entorno de c en el que g no se anula.

Proposición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ una función continua en $c \in D$. Si $f(c) \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in B(c, \delta)$. Además si f toma valores en $\mathbb{R}$ entonces el signo de $f(x)$ es el mismo en todos los $x \in B(c, \delta)$.

Proposición

Sea $f_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ una función continua en $c \in D_1$ y sea $f_2 : D_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f_1(D_1) \subset D_2$ continua en $f_1(c)$. Entonces $f_2 \circ f_1$ es continua en c.

Definición

Una función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es continua en D si es continua en cada punto de D.

Definición

Una función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es continua en D si es continua en cada punto de D.

Ejemplos

1. Las funciones constantes, la identidad y, más generalmente, los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{K}$.
2. La función exponencial, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$, es continua en $\mathbb{R}$.
3. La función logaritmo neperiano, $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log x$ es continua en $(0, +\infty)$.
4. Las funciones seno y coseno son continuas en $\mathbb{R}$.
5. La función definida por $f(t) = \cos t + i \sin t$ para $t \in [0, 2\pi]$ es continua.

Ejemplos

6. La función $f : [0,1] \cup [2,3] \cup \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2 & \text{si } x \in [2,3] \cup \{4\} \end{cases}$$

Y la función

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,2] \\ x^2 & \text{si } x \in (2,4] \end{cases}$$

7. La función $f : \mathbb{K} \longrightarrow [0,\infty)$ definida por $f(x) = |x|$ es una función continua.

8. La función de Dirichlet $D_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$D_1(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Definiciones. . . Tipos de discontinuidad

1. Una función f no es continua en un punto c de su dominio porque, a pesar de que existe $\lim_{x \to c} f(x)$, el valor de dicho límite no coincide con $f(c)$. Un punto c de esa naturaleza se llama una *discontinuidad evitable* para f.
2. Para el caso de funciones reales de variable real, si existen los dos límites laterales en c pero no coinciden se dice que la discontinuidad de f en c es de primera especie y se llama *salto* de f en c a la diferencia $|f(c^+) - f(c^-)|$.
3. Si alguno de los dos límites laterales no existe la discontinuidad se suele llamar *discontinuidad de segunda especie*.

Progreso

Miercoles 24 de Noviembre

- El Viernes 19 se hizo un taller con entrega y evaluación.
- Este miércoles se terminó en la página anterior.

Teorema de Weierstrass

Sea $f : B[a, r] \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en una bola cerrada y acotada de $\mathbb{K}$. Entonces:

1. f es una función acotada.
2. Existen $c, d \in B[a, r]$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, es decir, f alcanza sus valores máximo y mínimo en su dominio.

Teorema de Weierstrass

Sea $f : B[a, r] \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en una bola cerrada y acotada de $\mathbb{K}$. Entonces:

1. f es una función acotada.
2. Existen $c, d \in B[a, r]$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, es decir, f alcanza sus valores máximo y mínimo en su dominio.

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ de modo que $f(c) = 0$.

Teorema de Weierstrass

Sea $f : B[a,r] \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en una bola cerrada y acotada de $\mathbb{K}$. Entonces:

1. f es una función acotada.
2. Existen $c, d \in B[a,r]$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, es decir, f alcanza sus valores máximo y mínimo en su dominio.

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a,b)$ de modo que $f(c) = 0$.

Corolario: Propiedad de los valores intermedios

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y z está comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = z$.

Definición

Dada una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es

1. monótona creciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$;
2. monótona decreciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$;
3. estrictamente creciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) < f(x_2)$;
4. estrictamente decreciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) > f(x_2)$;
5. monótona si es monótona creciente o monótona decreciente;
6. estrictamente monótona si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Teorema (Función Inversa)

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua donde I es un intervalo arbitrario de $\mathbb{R}$. Entonces:

1. f es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.
2. Si f es estrictamente monótona, también lo es su inversa f^{-1} que, además, es continua.

Teorema (Función Inversa)

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua donde I es un intervalo arbitrario de $\mathbb{R}$. Entonces:

1. f es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.
2. Si f es estrictamente monótona, también lo es su inversa f^{-1} que, además, es continua.

Corolario

Sean I, J intervalos de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow J$ biyectiva. Entonces f es continua si y sólo si f es estrictamente monótona.

Definición

Se dice que la función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es uniformemente continua (en D) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in D$ arbitrarios, si se verifica $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Definición

Se dice que la función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es uniformemente continua (en D) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in D$ arbitrarios, si se verifica $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Teorema, Heine

Toda función continua definida en una bola cerrada y acotada $B[a, r]$ y con valores en $\mathbb{K}$ es uniformemente continua.

Progreso

Lunes 29 de Noviembre

Se terminó el tema este lunes. Falta comentar algunos ejemplos mas de funciones uniformemente continuas. Se insistirá en los talleres.