Funciones de Una Variable Real I: Derivadas

B. Cascales y L. Oncina

Universidad de Murcia
http://webs.um.es/beca

Grado en Matemáticas
Curso 2011-2012

Objetivos

Objetivos

- Definir, entender y aplicar el concepto de función derivable.
- Estudiar la relación entre derivabilidad, crecimiento, máximos y mínimos, optimización, etc.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice que es derivable en $c \in I$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} := f'(c).$$

El valor $f'(c)$ recibe el nombre de derivada de f en c y es frecuente llamar a

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

cociente incremental de f en c.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice que es derivable en $c \in I$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} := f'(c).$$

El valor $f'(c)$ recibe el nombre de derivada de f en c y es frecuente llamar a

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

cociente incremental de f en c.

Interpretaciones

1. Física: como la velocidad.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice que es derivable en $c \in I$ si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c).$$

El valor $f'(c)$ recibe el nombre de derivada de f en c y es frecuente llamar a

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

cociente incremental de f en c.

Interpretaciones

1. Física: como la velocidad.
2. Geométrica: como la pendiente de la recta tangente.

Interpretación geométrica

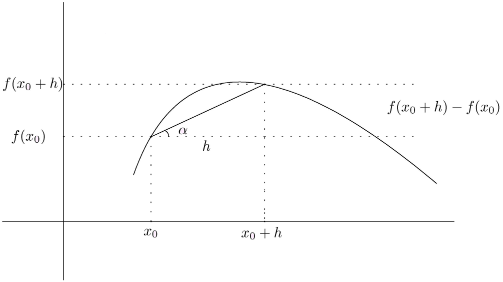
- Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Supongamos que f es derivable en x_0.

Interpretación geométrica

- Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$. Supongamos que f es derivable en x_0.
- Consideremos $h>0$ fijo y tracemos la secante a la curva que pasa por $(x_0,f(x_0))$ y $(x_0+h,f(x_0+h))$.

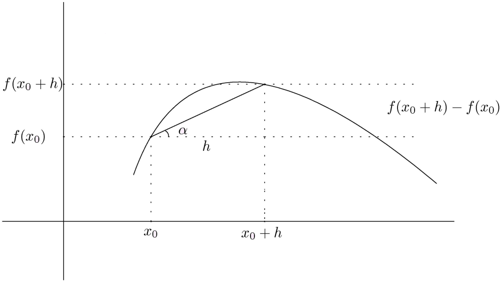
Interpretación geométrica

- Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$. Supongamos que f es derivable en x_0.
- Consideremos $h>0$ fijo y tracemos la secante a la curva que pasa por $(x_0,f(x_0))$ y $(x_0+h,f(x_0+h))$.



Interpretación geométrica

- Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$. Supongamos que f es derivable en x_0.
- Consideremos $h>0$ fijo y tracemos la secante a la curva que pasa por $(x_0,f(x_0))$ y $(x_0+h,f(x_0+h))$.
- La pendiente de la secante coincide con el valor del cociente incremental.



Interpretación geométrica

- Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$. Supongamos que f es derivable en x_0.
- Consideremos $h>0$ fijo y tracemos la secante a la curva que pasa por $(x_0,f(x_0))$ y $(x_0+h,f(x_0+h))$.
- La pendiente de la secante coincide con el valor del cociente incremental.
- Tomamos límite cuando $h\to 0$.

Interpretación geométrica

- Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$. Supongamos que f es derivable en x_0.
- Consideremos $h>0$ fijo y tracemos la secante a la curva que pasa por $(x_0,f(x_0))$ y $(x_0+h,f(x_0+h))$.
- La pendiente de la secante coincide con el valor del cociente incremental.
- Tomamos límite cuando $h\to 0$.
- El límite de los cocientes incrementales coincidirá con la pendiente "del límite".

Interpretación geométrica

Interpretación

$f'(x_0)$ es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de dicha recta viene dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Ejemplos

1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Ejemplos

1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula
2. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$ entonces f es derivable en I con derivada $f'(x) = 1$ para todo $x \in I$

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Ejemplos

1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula
2. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$ entonces f es derivable en I con derivada $f'(x) = 1$ para todo $x \in I$
3. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, es derivable en todo punto $c \neq 0$ y no es derivable en $c = 0$.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Ejemplos

1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula
2. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$ entonces f es derivable en I con derivada $f'(x) = 1$ para todo $x \in I$
3. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, es derivable en todo punto $c \neq 0$ y no es derivable en $c = 0$.
4. La función f definida en $\mathbb{R}$ mediante $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = nx^{n-1}$.

Funciones derivables

Ejemplos

5. La función seno, $g(x) = \operatorname{sen} x$, es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = \cos x$ y la función coseno, $h(x) = \cos x$, también es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $h'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Funciones derivables

Ejemplos

5. La función seno, $g(x) = \operatorname{sen} x$, es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = \cos x$ y la función coseno, $h(x) = \cos x$, también es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $h'(x) = -\operatorname{sen} x$.
6. La función exponencial, $f(x) = e^x$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = e^x$.

Funciones derivables

Ejemplos

5. La función seno, $g(x) = \operatorname{sen} x$, es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = \cos x$ y la función coseno, $h(x) = \cos x$, también es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $h'(x) = -\operatorname{sen} x$.
6. La función exponencial, $f(x) = e^x$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = e^x$.
7. La función logaritmo, $f(x) = \log x$ es derivable en $(0, \infty)$ y $f'(x) = 1/x$.

Funciones derivables

Ejemplos

5. La función seno, $g(x) = \operatorname{sen} x$, es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = \cos x$ y la función coseno, $h(x) = \cos x$, también es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $h'(x) = -\operatorname{sen} x$.
6. La función exponencial, $f(x) = e^x$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = e^x$.
7. La función logaritmo, $f(x) = \log x$ es derivable en $(0, \infty)$ y $f'(x) = 1/x$.

Sea $f : I \to J$ una biyección derivable entre los intervalos abiertos I y J y tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Supongamos además que f^{-1} es continua. Entonces f^{-1} es derivable en J y se tiene $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Funciones derivables

Ejemplos

5. La función seno, $g(x) = \operatorname{sen} x$, es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = \cos x$ y la función coseno, $h(x) = \cos x$, también es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $h'(x) = -\operatorname{sen} x$.
6. La función exponencial, $f(x) = e^x$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = e^x$.
7. La función logaritmo, $f(x) = \log x$ es derivable en $(0, \infty)$ y $f'(x) = 1/x$.
8. $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ no es derivable en $x = 0$. En cambio sí es derivable en todo $\mathbb{R}$ la función g dada por $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$.

Derivadas laterales

Definición

Para funciones definidas en un intervalo en que los límites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^+) \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^-)$$

existan, llamamos derivada por la izquierda $f'(c^-)$ de f en c y de derivada por la derecha $f'(c^+)$ de f en c.

Derivadas laterales

Definición

Para funciones definidas en un intervalo en que los límites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^+) \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^-)$$

existan, llamamos derivada por la izquierda $f'(c^-)$ de f en c y de derivada por la derecha $f'(c^+)$ de f en c.

Ejemplo

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$. En $x=0$ la función no es derivable, pero tiene derivada por la izquierda y por la derecha.

Aproximación local: diferenciabilidad

Observación

El hecho de que exista la derivada de f en c y valga m puede formularse diciendo que

$$f(c+h) = f(c) + mh + h\alpha(h) \tag{1}$$

donde $\alpha(h)$ es una función definida en un entorno reducido del origen con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$.

Aproximación local: diferenciabilidad

Observación

El hecho de que exista la derivada de f en c y valga m puede formularse diciendo que

$$f(c+h) = f(c) + mh + h\alpha(h) \tag{1}$$

donde $\alpha(h)$ es una función definida en un entorno reducido del origen con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$.

Definición

Llamaremos entorno reducido de $a \in \mathbb{K}$ a cualquier conjunto de la forma $V \setminus \{a\}$ siendo V un entorno de a.

Aproximación local: diferenciabilidad

Observación

El hecho de que exista la derivada de f en c y valga m puede formularse diciendo que

$$f(c+h) = f(c) + mh + h\alpha(h) \tag{1}$$

donde $\alpha(h)$ es una función definida en un entorno reducido del origen con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$.

Definición

Llamaremos entorno reducido de $a \in \mathbb{K}$ a cualquier conjunto de la forma $V \setminus \{a\}$ siendo V un entorno de a.

La ecuación anterior también se escribe a veces en la forma

$$f(c+h) = f(c) + mh + o(h) \tag{2}$$

donde $o(h)$ representa una función definida en un entorno reducido de 0 con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$. La función $o(h)$ se llama una «*o pequeña de h*».

Aproximación local: diferenciabilidad

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice diferenciable en el punto $c \in I$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada diferencial de f en c y denotada con $df(c)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - L(h)}{h} = 0$$

Aproximación local: diferenciabilidad

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice diferenciable en el punto $c \in I$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada diferencial de f en c y denotada con $df(c)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - L(h)}{h} = 0$$

Proposición

f es una función derivable en el punto c si y sólo si f es diferenciable en c y, en ese caso, $df(c)(x) = f'(c)x$.

Aproximación local: diferenciabilidad

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice diferenciable en el punto $c \in I$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada diferencial de f en c y denotada con $df(c)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - L(h)}{h} = 0$$

Proposición

f es una función derivable en el punto c si y sólo si f es diferenciable en c y, en ese caso, $df(c)(x) = f'(c)x$.

Proposición

Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $c \in I$ entonces f es continua en c.

Propiedades de funciones derivables

Proposición

Si f, g son funciones del intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ derivables en un punto $c \in I$ entonces:

1. La suma $f+g$ es derivable en c con
$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$
2. El producto fg es derivable en c con
$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$
3. Si $g(c) \neq 0$ en I entonces f/g es derivable en c y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}.$$

Propiedades de funciones derivables

Regla de la cadena

Sean I_1, I_2 intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y sean las funciones $f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_1(I_1) \subset I_2$. Si f_1 es derivable en $c \in I_1$ y f_2 es derivable en $f_1(c)$ entonces $f_2 \circ f_1$ es derivable en c y

$$(f_2 \circ f_1)'(c) = f_2'(f_1(c))f_1'(c).$$

Propiedades de funciones derivables

Regla de la cadena

Sean I_1, I_2 intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y sean las funciones $f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_1(I_1) \subset I_2$. Si f_1 es derivable en $c \in I_1$ y f_2 es derivable en $f_1(c)$ entonces $f_2 \circ f_1$ es derivable en c y

$$(f_2 \circ f_1)'(c) = f_2'(f_1(c)) f_1'(c).$$

Ejemplo

Probar que para $x \neq 0$ la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ es derivable.

Monotonía

Monotonía

Monotonía en un punto

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:

Monotonía

Monotonía en un punto

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:

- f es creciente (respectivamente, estrictamente creciente) en c, si existe un entorno reducido V de c tal que para cada $x \in I \cap V$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (\text{respectivamente } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0).$$

Monotonía

Monotonía en un punto

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:

- f es creciente (respectivamente, estrictamente creciente) en c, si existe un entorno reducido V de c tal que para cada $x \in I \cap V$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (\text{respectivamente } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0).$$

- f es decreciente (respectivamente, estrictamente decreciente) en c, si existe un entorno reducido V de c tal que para cada $x \in I \cap V$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (\text{respectivamente } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0).$$

Extremos

Extremos relativos

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:

Extremos

Extremos relativos

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:

- f tiene un *máximo relativo* o local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I \cap V$.

Extremos

Extremos relativos

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:

- f tiene un *máximo relativo* o local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I \cap V$.
- f tiene un *mínimo relativo* o local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I \cap V$.

Extremos

Extremos relativos

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:

- f tiene un *máximo relativo* o local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I \cap V$.
- f tiene un *mínimo relativo* o local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I \cap V$.
- f tiene un *extremo relativo* en c si f tiene en c un máximo o un mínimo relativo.

Funciones derivables: crecimiento

Proposición

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. f es creciente (decreciente) en I.
2. f es creciente (decreciente) en cada $x \in I$.

Funciones derivables: crecimiento

Proposición

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. f es creciente (decreciente) en I.
2. f es creciente (decreciente) en cada $x \in I$.

Proposición

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I y sea $c \in I$.

1. Si f es derivable en c y $f'(c) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en c.
2. Si f es derivable en c y $f'(c) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en c.
3. Si c es un punto interior del intervalo I, f es derivable en c y c es un extremo relativo, entonces $f'(c) = 0$.

Funciones derivables: crecimento

Observaciones

1. La anulación de la derivada en un punto no implica que la función tenga un extremo en dicho punto. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^3$, que es estrictamente creciente en $x = 0$ pero para la que $f'(0) = 0$.

Funciones derivables: crecimento

Observaciones

1. La anulación de la derivada en un punto no implica que la función tenga un extremo en dicho punto. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^3$, que es estrictamente creciente en $x = 0$ pero para la que $f'(0) = 0$.
2. La función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, tiene un máximo relativo en $x = 1$ y sin embargo $f'(1) = 1 \neq 0$.

Funciones derivables: crecimento

Observaciones

1. La anulación de la derivada en un punto no implica que la función tenga un extremo en dicho punto. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^3$, que es estrictamente creciente en $x = 0$ pero para la que $f'(0) = 0$.
2. La función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, tiene un máximo relativo en $x = 1$ y sin embargo $f'(1) = 1 \neq 0$.
3. No debe confundirse el que una función sea creciente en un punto con que lo sea en un entorno del punto. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ verifica que $f'(0) = 1$ y por tanto es estrictamente creciente en $x = 0$; sin embargo su derivada $f'(x) = 1 + 4x \operatorname{sen}(1/x) - 2\cos(1/x)$, para $x \neq 0$, toma valores positivos y negativos en cada entorno reducido de 0.

Teorema de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Cauchy

Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas. Si f, g son derivables en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Teorema de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Cauchy

Sean $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas. Si f,g son derivables en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Corolario: Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a,b), entonces existe $\theta \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b-a)$.

Teorema de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Cauchy

Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas. Si f, g son derivables en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Corolario: Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a, b), entonces existe $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a)$.

Corolario: Teorema de los incrementos finitos

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b). Si $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, b)$ entonces, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo par $x, y \in [a, b]$.

Teorema de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Cauchy

Sean $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas. Si f,g son derivables en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$.

Corolario: Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a,b), entonces existe $\theta \in (a,b)$ tal que $f(b)-f(a) = f'(\theta)(b-a)$.

Corolario: Teorema de los incrementos finitos

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). Si $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$ entonces, $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ para todo par $x,y \in [a,b]$.

T. de Rolle $\Rightarrow$ T. de Cauchy $\Rightarrow$ T. de Lagrange $\Rightarrow$ T. de Rolle

Teorema de Rolle y del valor medio

Corolario

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

1. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en $[a, b]$.
2. $f'(x) \geq 0$ en (a, b) si y sólo si f es creciente en $[a, b]$.
3. $f'(x) \leq 0$ en (a, b) si y sólo si f es decreciente en $[a, b]$.
4. Si $f'(x) > 0$, en (a, b), entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.
5. Si $f'(x) < 0$, en (a, b), entonces f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

Teorema de Rolle y del valor medio

Corolario

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

1. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en $[a,b]$.
2. $f'(x) \geq 0$ en (a,b) si y sólo si f es creciente en $[a,b]$.
3. $f'(x) \leq 0$ en (a,b) si y sólo si f es decreciente en $[a,b]$.
4. Si $f'(x) > 0$, en (a,b), entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$.
5. Si $f'(x) < 0$, en (a,b), entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

Puede ser f estrictamente creciente y sin embargo tener que $f'(x) = 0$ para algún x: tomar por ejemplo $f(x) = x^3$.

Derivadas y extremos relativos

Corolario

Sea $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y sea $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

1. Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ y $f'(x) \geq 0$ si $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$, entonces f posee un mínimo relativo en c.
2. Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ si $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ y $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$, entonces f posee un máximo relativo en c.

Derivadas y extremos relativos

Corolario

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable y sea $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

1. Si existe $\delta>0$ tal que $f'(x)\leq 0$ si $x\in(c-\delta,c)\subset(a,b)$ y $f'(x)\geq 0$ si $x\in(c,c+\delta)\subset(a,b)$, entonces f posee un mínimo relativo en c.
2. Si existe $\delta>0$ tal que $f'(x)\geq 0$ si $x\in(c-\delta,c)\subset(a,b)$ y $f'(x)\leq 0$ si $x\in(c,c+\delta)\subset(a,b)$, entonces f posee un máximo relativo en c.

Ejemplo

La desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^n>1+nx;\qquad \text{si } x>-1, x\neq 0 \text{ y } n\in\mathbb{N} \text{ con } n>1$$

puede ser demostrada por inducción sobre n cuando n es un número natural. Pero es cierta incluso cuando $n>1$ es un número real.

Derivadas y extremos relativos

Corolario

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable y sea $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

1. Si existe $\delta>0$ tal que $f'(x)\leq 0$ si $x\in(c-\delta,c)\subset(a,b)$ y $f'(x)\geq 0$ si $x\in(c,c+\delta)\subset(a,b)$, entonces f posee un mínimo relativo en c.
2. Si existe $\delta>0$ tal que $f'(x)\geq 0$ si $x\in(c-\delta,c)\subset(a,b)$ y $f'(x)\leq 0$ si $x\in(c,c+\delta)\subset(a,b)$, entonces f posee un máximo relativo en c.

Ejemplo

La desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^n>1+nx;\qquad \text{si } x>-1, x\neq 0 \text{ y } n\in\mathbb{N} \text{ con } n>1$$

puede ser demostrada por inducción sobre n cuando n es un número natural. Pero es cierta incluso cuando $n>1$ es un número real.

Proposición: Propiedad de los valores intermedios en derivadas

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable y sean $x,y\in(a,b)$ tales que $f'(x)<\eta<f'(y)$. Entonces existe $z\in(a,b)$ tal que $f'(z)=\eta$

Teorema de la función inversa

Teorema de la función inversa

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I y derivable en el interior de I con derivada no nula. Entonces f es una biyección de I sobre un intervalo J de $\mathbb{R}$ y $f^{-1} : J \longrightarrow I$ es continua en J y derivable en el interior de J con

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Teorema de la función inversa

Teorema de la función inversa

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I y derivable en el interior de I con derivada no nula. Entonces f es una biyección de I sobre un intervalo J de $\mathbb{R}$ y $f^{-1} : J \longrightarrow I$ es continua en J y derivable en el interior de J con

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ejemplos

1. $f = \log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable con derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$.
2. $f = \operatorname{arcsen} : (-1, 1) \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es derivable con derivada $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $f : \arccos : (-1, 1) \longrightarrow (0, \pi)$ es derivable con derivada $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. $f = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es derivable con derivada $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Regla de L'Hospital

Proposición (Regla de L'Hospital)

Sean f, g funciones derivables en $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supongamos que g y g' no tienen ceros en I y que se cumple una de las condiciones siguientes:

1. $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$.
2. $\lim_{x \to b^-} g(x) = \pm\infty$.

Entonces, si existe

$$L := \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ también existe } \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observación

El recíproco de la proposición anterior no es cierto.
En efecto:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Pero, sin embargo, no existe el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x - \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}.$$