



Examen TIPO 1: Funciones de una variable real I

9 de Septiembre de 2011

Alumna/o:

### TEORÍA Y CUESTIONES TEÓRICAS

•(0.3 puntos) Definir los conceptos de sucesión convergente, sucesión acotada y sucesión monótona.

•(0.5 puntos) Demostrar que toda sucesión monótona creciente acotada superiormente es convergente.

•(0.2 puntos) Dar ejemplos de una sucesión monótona no convergente y de una sucesión convergente no monótona.



- (0.5 puntos) **Enunciar y demostrar** el teorema de Rolle.



**Cuestiones Teóricas:** Cada cuestión vale **0.5 puntos**. Marcar las soluciones correctas en cada cuestión: no es necesario escribir explicación alguna.

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre números reales son verdaderas?
  - a) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la raíz  $n$ -ésima de un irracional positivo es un irracional. **Opción correcta**
  - b) El producto de un número racional no nulo por un número irracional es un número irracional. **Opción correcta**
  - c) Todo número irracional tiene un inverso que es también un número irracional. **Opción correcta**
  - d) Todo número irracional es límite de una sucesión de números racionales. **Opción correcta**
  - e) Todo número racional es límite de una sucesión de números irracionales. **Opción correcta**
  - f) Ninguna de las anteriores.
  
2. Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  un punto de acumulación de  $I$  tal que existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ .
  - a) Si existe  $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) \in \mathbb{R}$  entonces existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}$ . **Opción correcta**
  - b) Si no existe  $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) \in \mathbb{R}$  entonces no existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}$ . **Opción correcta**
  - c) Si existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}$  entonces existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) \in \mathbb{R}$ .
  - d) Si existe  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g) \in \mathbb{R}$  entonces para cada sucesión  $x_n \rightarrow a$  existe  $\lim_n g(x_n) \in \mathbb{R}$ . **Opción correcta**
  - e) Ninguna de las anteriores.
  
3. Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  estrictamente decreciente. Entonces:
  - a) Si  $f$  es derivable en  $(0, 1)$ , se tiene que  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in (0, 1)$ . **Opción correcta**
  - b)  $f([0, 1]) = [f(0), f(1)]$ .
  - c)  $f$  es inyectiva en  $[0, 1]$ . **Opción correcta**
  - d) Para cada  $a \in (0, 1)$  existen  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \in \mathbb{R}$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \in \mathbb{R}$  y el primer límite no es mayor que el segundo. **Opción correcta**
  - e) Ninguna de las anteriores.



## CUESTIONES PRÁCTICAS Y PROBLEMAS

**Cuestiones Prácticas:** Cada cuestión vale **0.75 puntos**. Marcar las soluciones correctas en cada cuestión: no es necesario escribir explicación alguna.

1. Sea  $a_n := n \log \sqrt{\frac{1+1/n}{1-1/n}}$ .

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . Opción correcta

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ .

e) Ninguna de las anteriores.

2. Se considera la serie de números reales positivos  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , donde  $a_n := \frac{n3^{2n}}{2^n} b^n$ , donde  $b > 0$ .

a) La serie es convergente para cualquier real positivo  $b$ .

b) La serie es divergente si  $b > 1$ . Opción correcta

c) La serie es convergente si  $b < \frac{2}{9}$ . Opción correcta

d) La serie es convergente si  $b \geq \frac{2}{9}$ .

e) Ninguna de las anteriores.

3. Se consideran las funciones  $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$  y  $g(x) = \log(x-1) - \log(x+2)$  para valores de  $x$  en sus respectivos dominios.

a)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \notin \{-1, 2\}$ .

b)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

c)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \text{dom}(f)$ .

d)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \text{dom}(g)$ . Opción correcta

e) Ninguna de las anteriores.

4. Se considera  $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 6$ .

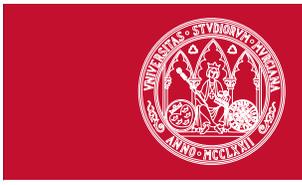
a)  $f$  tiene una única raíz en  $\mathbb{R}$ .

b)  $f$  tres raíces en  $\mathbb{R}$ . Opción correcta

c)  $f$  tiene un máximo y un mínimo relativos. Opción correcta

d)  $f$  alcanza su máximo y mínimo absolutos.

e) Ninguna de las anteriores.



### Problema 1. Apartado A (1 punto)

Para la sucesión recurrente  $x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + 5$  si  $n \geq 1$  y  $x_1 = 1$ . Se pide:

• **Razonar** si está acotada superior, inferiormente o las dos cosas.

• **Razonar** si es creciente o decreciente.

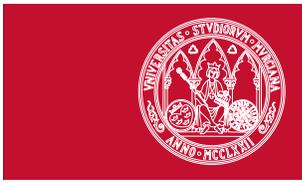
• **Razonar** si tiene límite y en su caso calcularlo.



### Problema 1. Apartado B (1 punto)

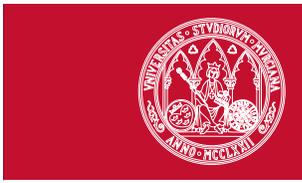
Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$



## Problema 2. Apartado A (1 punto)

Una ventana tiene forma de rectángulo coronado por un triángulo equilátero de lado igual a la base del rectángulo. El perímetro total de la ventana es igual a 5 metros. Sabiendo que la cantidad de luz que atraviesa la ventana es proporcional a su área, hallar las dimensiones de la ventana para que deje pasar la mayor cantidad posible de luz a través de ella.



## Problema 2. Apartado B (1 punto)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **Estudiar** la continuidad de la función en  $\mathbb{R}$ .

• **Estudiar**, la derivabilidad de la función en  $\mathbb{R}$ .

• **Encontrar**, dando una justificación, el máximo y mínimo absolutos de  $f$  en el intervalo  $[-2, 2]$ , y los puntos donde se alcanzan.