Examen TIPO 1: Funciones de una variable real I **9 de Septiembre de 2011**

Alumna/o:

TEORÍA Y CUESTIONES TEÓRICAS

•**(0.3 puntos) Definir** los conceptos de sucesión convergente, sucesión acotada y sucesión monótona.

•**(0.5 puntos) Demostrar** que toda sucesión monótona creciente acotada superiormente es convergente.

•**(0.2 puntos) Dar ejemplos** de una sucesión monótona no convergente y de una sucesión convergente no monótona.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es. y luis@um.es

•**(0.5 puntos) Enunciar y demostrar** el teorema de Rolle.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es. y luis@um.es

Cuestiones Teóricas: Cada cuestión vale **0.5 puntos**. Marcar las soluciones correctas en cada cuestión: no es necesario escribir explicación alguna.

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre números reales son verdaderas?

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, la raíz n-ésima de un irracional positivo es un irracional. **Opción correcta**

   b) El producto de un número racional no nulo por un número irracional es un número irracional. **Opción correcta**

   c) Todo número irracional tiene un inverso que es también un número irracional. **Opción correcta**

   d) Todo número irracional es límite de una sucesión de números racionales. **Opción correcta**

   e) Todo número racional es límite de una sucesión de números irracionales. **Opción correcta**

   f) Ninguna de las anteriores.

2. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de I tal que existe $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$.

   a) Si existe $\lim_{x\to a}(f-g)(x) \in \mathbb{R}$ entonces existe $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$. **Opción correcta**

   b) Si no existe $\lim_{x\to a}(fg)(x) \in \mathbb{R}$ entonces no existe $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$. **Opción correcta**

   c) Si existe $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$ entonces existe $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) \in \mathbb{R}$.

   d) Si existe $\lim_{x\to a}(f+g) \in \mathbb{R}$ entonces para cada sucesión $x_n \to a$ existe $\lim_n g(x_n) \in \mathbb{R}$. **Opción correcta**

   e) Ninguna de las anteriores.

3. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente decreciente. Entonces:

   a) Si f es derivable en $(0,1)$, se tiene que $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (0,1)$. **Opción correcta**

   b) $f\big([0,1]\big) = [f(0), f(1)]$.

   c) f es inyectiva en $[0,1]$. **Opción correcta**

   d) Para cada $a \in (0,1)$ existen $\lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) \in \mathbb{R}$ y el primer límite no es mayor que el segundo. **Opción correcta**

   e) Ninguna de las anteriores.

CUESTIONES PRÁCTICAS Y PROBLEMAS

Cuestiones Prácticas: Cada cuestión vale **0.75 puntos**. Marcar las soluciones correctas en cada cuestión: no es necesario escribir explicación alguna.

1. Sea $a_n := n \log \sqrt{\frac{1+1/n}{1-1/n}}$.

   a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.______________ **Opción correcta**

   c) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

   d) $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.

   e) Ninguna de las anteriores.

2. Se considera la serie de números reales positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n := \frac{n3^{2n}}{2^n} b^n$, donde $b > 0$.

   a) La serie es convergente para cualquier real positivo b.

   b) La serie es divergente si $b > 1$. ______________ **Opción correcta**

   c) La serie es convergente si $b < \frac{2}{9}$.______________ **Opción correcta**

   d) La serie es convergente si $b \geq \frac{2}{9}$.

   e) Ninguna de las anteriores.

3. Se consideran las funciones $f(x) = \log(\frac{x-1}{x+2})$ y $g(x) = \log(x-1) - \log(x+2)$ para valores de x en sus respectivos dominios.

   a) $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin \{-1, 2\}$.

   b) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in dom(f)$.

   d) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in dom(g)$.______________ **Opción correcta**

   e) Ninguna de las anteriores.

4. Se considera $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 6$.

   a) f tiene una única raíz en $\mathbb{R}$.

   b) f tres raíces en $\mathbb{R}$.______________ **Opción correcta**

   c) f tiene un máximo y un mínimo relativos. ______________ **Opción correcta**

   d) f alcanza su máximo y mínimo absolutos.

   e) Ninguna de las anteriores.

Problema 1. Apartado A (1 punto)

Para la sucesión recurrente $x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + 5$ si $n \geq 1$ y $x_1 = 1$. Se pide:

•**Razonar** si está acotada superior, inferiormente o las dos cosas.

•**Razonar** si es creciente o decreciente.

•**Razonar** si tiene límite y en su caso calcularlo.

Problema 1. Apartado B (1 punto)

Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es. y luis@um.es

Problema 2. Apartado A (1 punto)

Una ventana tiene forma de rectángulo coronado por un triángulo equilátero de lado igual a la base del rectángulo. El perímetro total de la ventana es igual a 5 metros. Sabiendo que la cantidad de luz que atraviesa la ventana es proporcional a su área, hallar las dimensiones de la ventana para que deje pasar la mayor cantidad posible de luz a través de ella.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es. y luis@um.es

Problema 2. Apartado B (1 punto)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x - x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

•**Estudiar** la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

•**Estudiar**, la derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

•**Encontrar**, dando una justificación, el máximo y mínimo absolutos de f en el intervalo $[-2, 2]$, y los puntos donde se alcanzan.