15. Sea $\Omega = D(0,1)$, y Gemma

$\mathcal{F} = \{ f \in H(\Omega) : f(0) = 1,\ \operatorname{Re}(f(z)) > 0,\ \forall z \in \Omega \}$

a) Pruébese que $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $H(\Omega)$ y que $|f'(0)| \le 2$ $\forall f \in H(\Omega)$.

b) Demuéstrese que si $f \in \mathcal{F}$ y $|f'(0)| = 2$, entonces $f(z) = \dfrac{1+\alpha z}{1-\alpha z}$, donde α es uno de con $|\alpha| = 1$.

Creo que esto es $f \in \mathcal{F}$!!

A) p.d a: $\mathcal{F}$ es subconjunto compacto de $H(D(0,1))$ ($\mathcal{F} \subset H(D(0,1))$, compacto)

p.d: $\mathcal{F}$ cerrado y acotado

1º) $\mathcal{F}$ familia cerrada:

p.d. Sea $f_n \subset \mathcal{F}$ Tq $f_n \longrightarrow f$ uniform $\Longrightarrow f \in \mathcal{F}$

Si $f_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow f_n \in H(D(0,1)) \wedge f_n(0) = 1 \wedge$ $\operatorname{Re}(f_n(z)) > 0$ $\forall z \in D(0,1)$, pero

- Si $f_n \longrightarrow f$ unif $\Longrightarrow \operatorname{Re} f_n \longrightarrow \operatorname{Re} f$ unif.
  $\Longrightarrow$ [Si $\operatorname{Re} f_n > 0 \Longrightarrow \operatorname{Re} f \ge 0$ $\forall z \in D(0,1)$] (1)
  Ver esto mejor. Si $\operatorname{Re} f = 0 \Rightarrow f$ no es abierta, $\Rightarrow f \equiv cte$!!
- Si $f_n \longrightarrow f$ unif $\Longrightarrow$ [Si $f_n \in H(D(0,1))$ $\Longrightarrow$] Por T. W] $f \in H(D(0,1))$ (2)
- Si $f_n \longrightarrow f$ unif $\Longrightarrow f_n(0) \longrightarrow f(0)$ punt.

como $(f_n(0)) = 1 \Longrightarrow f(0) = 1$ (3)

$(1), (2), (3) \Longrightarrow f \in \tilde{\mathcal{F}}$.

2º) $\tilde{\mathcal{F}}$ es acotada: (Por prop. Teoría Familias normales)

Si $f_n \in \tilde{\mathcal{F}} \Longrightarrow \operatorname{Re} f_n(z) > 0 \Longrightarrow$
$f(\Omega) \subset \{z : \operatorname{Re} f(z) > 0\} \Longrightarrow \bigcup\limits_{f \in \tilde{\mathcal{F}}}^{\infty} f_n(\Omega) \neq \mathbb{C}$

$f_n(0) = 1 \Longrightarrow f_n(0)$ acotada

$\Longrightarrow$ f_n acotada

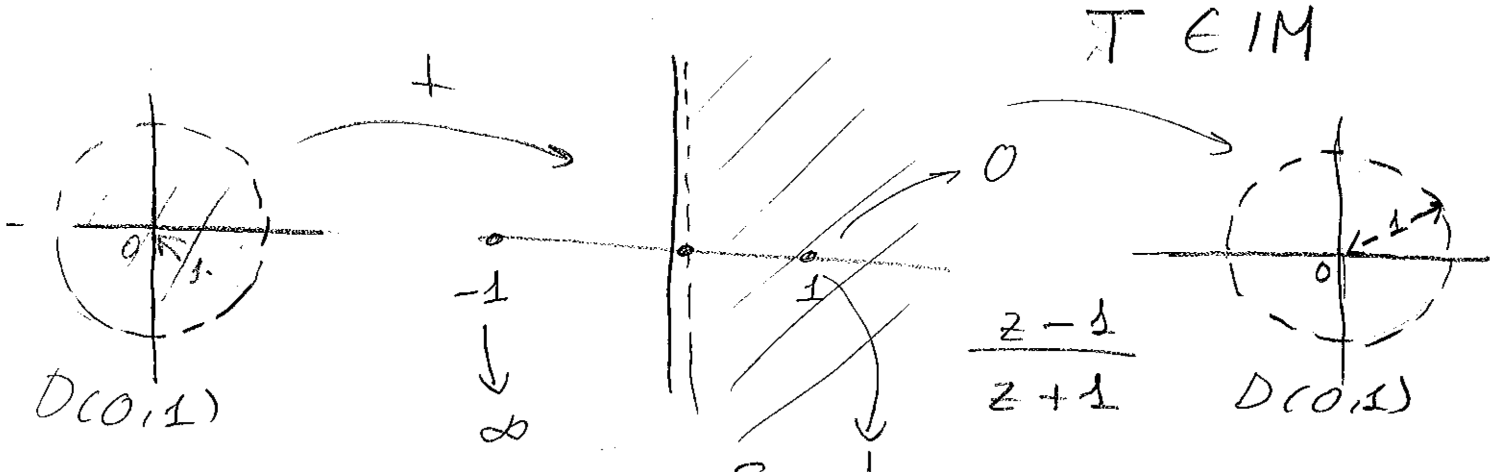
$\downarrow$

Criterio de Normalidad

p.d: $|f'(0)| \leq 2 \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{F}}$

Como $f(D(0,1)) \subset \{z : \operatorname{Re} f(z) > 0\}$

podemos considerar:



Si este va a ser el centro y va a 0, el 0 va a un punto de $\partial D(0,1)$
$\Longrightarrow |S(0)|$ es el radio de $D(0,1)$ $= 1$

Muy bueno para Teoría M.

$\Longrightarrow \ \varphi := T \circ f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$

Tq $\ T \circ f(0) = T(1) = 0 \ \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{H}(D(0,1)) \\ \varphi(0) = 0 \\ |\varphi(z)| \leq 1 \text{ pues} \\ \varphi(D(0,1)) \subset D(0,1) \end{array}\right\} \underset{\text{Lema de Schwarz}}{\Longrightarrow} |\varphi'(0)| \leq 1$$

$$\Longrightarrow |(T \circ f)'(0)| \leq 1 \ \hat{=} \ |T'(f(0)) \cdot f'(0)| \leq 1$$

$\hat{=} \ |T'(1) \cdot f'(0)| \leq 1$ pero

$$T'(z) = \frac{(z+1)-(z-1)}{(z+1)^2} = \frac{2}{(z+1)^2} \Rightarrow T'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{1}{2} f'(0)\right| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| \leq 2 \quad \#$$

B) p.d: $f(z) = \dfrac{1+\alpha z}{1-\alpha z}$, α cte con $|\alpha| = 1$:

con $|f'(0)| = 2$

Si $|f'(0)| = 2 \Longrightarrow |\varphi'(0)| = |T'(1) \cdot f'(0)|$

$= \left|\frac{1}{2} f'(0)\right| = 1 \Rightarrow |\varphi'(0)| = 1 \Longrightarrow$ Lema de Schwarz $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ Tq $\varphi(z) = e^{i\alpha} z$

$\Longrightarrow T \circ f(z) = e^{i\alpha} z$ y como

$$T^{-1}(z) = \frac{z+1}{-z+1} \Rightarrow f(z) = T^{-1} \circ T \circ f =$$

$$T^{-1}(e^{i\alpha} z) = \frac{e^{i\alpha}z + 1}{-e^{i\alpha}z + 1} = \frac{1 + e^{i\alpha}z}{1 - e^{i\alpha}z} \quad \#$$

EJERCICIO 13.- Sea Ω abierto y sea $A \subset \Omega$ con $A' \cap \Omega = \emptyset$. Para cada $\alpha \in A$. sea $m(\alpha) \in \mathbb{N}$ $w_{n,\alpha} \in \mathbb{C}$. para $0 \le n \le m(\alpha)$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha) = w_{n,\alpha}. \quad \text{si} \quad \alpha \in A. \qquad 0 \le n \le m(\alpha).$$

Resolución: Por el teorema de Weierstrass existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. tal que $Z(g) = A$ y para cada $\alpha \in A$, la multiplicidad del cero α es $m(\alpha)+1$. Identificando coeficientes es posible encontrar una función

$$P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)+1} \frac{c_{j,\alpha}}{(z-\alpha)^j}$$

de modo que. en algún disco de centro α.

$$g(z) \cdot P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right) = w_{0,\alpha} + w_{1,\alpha}(z-\alpha) + \cdots + w_{m(\alpha),\alpha}(z-\alpha)^{m(\alpha)} + \cdots$$

Ahora por el teorema de Mittag-Leffler, existe $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que la parte singular alrededor de cada $\alpha \in A$, es dada por $P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)$. Así la función $g \cdot h$ tiene las propiedades deseadas. #

A partir de aquí hay soluciones a los problemas que son notas personales, algunas no constrasdadas hace tiempo. Utilizaras con sentido crítico. BERNARDO

EJERCICIO 7.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $K \subset \Omega$ compacto. Sea $a \in \Omega$ $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Consideremos $\mathcal{F} = \{ f \in \mathcal{H}(\Omega) : \ |f(z)| \leq \alpha \ \ |f'(a)| \geq \beta \}$ y sea $n(f, K)$ el numero de ceros de f en K. Probar que $\{n(f,K) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado.

Resolución: Vamos a probar que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es compacto. Es evidente que f es cerrado, puesto que si $(f_n) \subset \mathcal{F}$ es una sucesión en $\mathcal{F}$ con $f_n \longrightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $|f(z)| \leq \alpha$. para todo $z \in \Omega$ y como por otra parte la derivación es continua, $|f'(a)| \geq \beta$. quedando así que $f \in \mathcal{F}$. Por otra parte es evidente que $\mathcal{F}$ es normal, i.e, relativamente compacto.

Tenemos pues un subconjunto relativamente compacto y cerrado, y por lo tanto compacto.

Procedamos por reducción al absurdo suponiendo que $\{n(f,K) : f \in \mathcal{F}\}$ no es acotado. Existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ tal que

$$n(f_n, K) \geq n \quad (*)$$

Por compacidad existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \longrightarrow f \in \mathcal{F}$.
Es claro que f no es identicamente nula puesto que $|f'(a)| > 0$. en un conexo, y por lo tanto el número de ceros de f en K es finito, ó en cualquier compacto contenido en el abierto. Por compacidad de K existe un recubrimiento abierto finito,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i, r_i) \quad \text{con} \quad \overline{D(a_i,r_i)} \subset \Omega \quad \text{y}$$

$$\text{con} \quad f(z) \neq 0 \quad \text{si} \quad z \in \bigcup_{i=1}^{n} \partial \overline{D(a_i,r_i)}.$$

Así por el teorema de Hurwitz, existe j_0: $j \geq j_0$

$$\text{nº ceros de } f_{n_j} \text{ en } D(a_i, r_i) = \text{nº ceros } f \text{ en } D(a_i, r_i)$$

y por lo tanto,

$$n(f_{n_j}, K) \leq \sum_{i=1}^{n} (\text{nº ceros } f_{n_j}, D(a_i,r_i)) = \sum_{i=1}^{n} (\text{nº ceros } f, D(a_i,r_i)) = M.$$

en contradicción con $(*)$

#

EJERCICIO 15.- Sea $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: |\mathrm{Im}\, z|<\pi/2\}$ y $\mathcal{F}$ la familia de funciones holomorfas $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tales que $|f(z)|\leq 1$ para cada $z\in\Omega$. Obtener $\sup\{|f'(0)|: f\in\mathcal{F}\}$ ¿Es accesible este supremo?

Resolución: Observemos que por una parte $\mathcal{F}$ es normal, y por otra es cerrado, y en consecuencia es compacto. Por lo tanto, la función continua

$$\mathcal{F}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$f\longmapsto|f'(0)|$$

alcanza un maximo en el compacto. Para calcularlo observemos.

$$\sup\{|f'(0)|: f\in\mathcal{F}\}=\sup\{|f'(0)|: f:\Omega\longrightarrow D(0,1) \text{ holomorfa}\}=$$
$$=|h'(0)|.$$

siendo $h:\Omega\longmapsto D(0,1)$ holomorfa biyectiva con $h(0)=0$. Así será suficiente encontrar una función holomorfa biyectiva en estas condiciones,

$$z\longrightarrow e^z\longrightarrow\frac{z-1}{z+1}$$
$$\Omega\longrightarrow\{z:\mathrm{Real}\, z>0\}\longrightarrow D(0,1).$$

La función $f(z)=\dfrac{e^z-1}{e^z+1}$ tiene las propiedades requeridas, y $f'(0)=1/2$. Por lo tanto el supremo es un medio, y ciertamente es accesible. #

C3.15 bis. Sea $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: |\mathrm{Im}\, z|<\frac{\pi}{2}\}$ y $P=\{f\in\mathcal{H}(\Omega): \mathrm{Re}\, z>0\}$. Calcúlese el valor de

$$\sup\{|f'(0)|: f\in\mathcal{H}(\Omega),\ f(\Omega)\subset P,\ f(0)=1\}.$$

¿Es accesible este supremo?

Resolución.- $\mathcal{F}:=\{f\in\mathcal{H}(\Omega): f(\Omega)\subset P, f(0)=1\}$.

$\mathcal{F}$ normal y cerrada $\Rightarrow$ f es compacta. En consecuencia

$$\mathcal{H}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$f\longmapsto|f'(0)|$$

es continua y así alcanza un máximo en $\mathcal{F}$. Por otra parte si llamamos $S(z)=e^z$, entonces $S:\Omega\longmapsto P$ es una biyección holomorfa con $S(0)=1$. Por lo tanto, dada $f\in\mathcal{F}$ la composición $f\circ S^{-1}: P\longrightarrow P$ y lleva el 1 a 1. Como aplicación del lema de Schwarz se tiene que

$$|f'(S^{-1}(1))(S^{-1})'(1)|\leq 1$$

de donde

$$|f'(0)|\leq\frac{1}{|(S^{-1})'(S(0))|}=\frac{1}{\left|\frac{1}{S'(0)}\right|}=|S'(0)|$$

y por lo tanto el supremo se alcanza en una biyección, y como quiera que S lo es, se tiene que dicho supremo vale $|S'(0)|=1$. #

EJERCICIO 16.-

a) Sea $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo Ω que verifica $0 < |f_n(z)| \le |f_{n+1}(z)|$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \Omega$. Se supone que $f_n(a)$ converge para algún punto $a \in \Omega$.

i) Demostrar que existe $\lim_n |f_n(z)| = h(z)$ para cada $z \in \Omega$ y que h es continua.

ii) Deducir de i) que f_n es convergente en $\mathcal{H}(\Omega)$.

b) Sea $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones holomorfas en el abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, tal que $u_n = \text{Real}(f_n)$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$. y $f_n(a)$ converge para algun $a \in \Omega$. Demostrar que f_n converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Resolución:

a) $\{1/f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal. Por lo tanto existe una subsucesión convergente $1/f_{n_k} \longrightarrow g \in \mathcal{H}(\Omega)$, uniformemente sobre compactos. Ahora bien como $g(a) \neq 0$, por un corolario del teorema de Hurwitz se tiene que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Por lo tanto $f_{n_k} \longrightarrow 1/g \in \mathcal{H}(\Omega)$ uniformemente sobre compactos. De aquí se deduce que $|f_{n_k}|$ verifica la condición de Cauchy uniformemente sobre compactos, y por la condición de monotonia de $|f_n(z)|$, se deduce que $|f_n|$ es una sucesión de Cauchy en $C(\Omega, \mathbb{R})$ para la topologia de convergencia uniforme sobre compactos. Por completitud de este espacio existe $h \in C(\Omega, \mathbb{R})$ con $\lim_n |f_n(z)| = h(z)$. (uniforme sobre compactos). y así queda probada la primera parte.

Para la segunda basta observar que $|f_n(z)| \le h(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \Omega$. Consecuentemente la familia es normal, y por lo tanto está contenida en un compacto de un espacio metrizable; si vemos que tiene un único punto de aglomeración se tendra que la sucesión ha de ser convergente. en $\mathcal{H}(\Omega)$.

Si fuera $f_{n_k} \xrightarrow{\mathcal{H}(\Omega)} f$, $f_{n_j} \xrightarrow{\mathcal{H}(\Omega)} g$, se tendria que $|f| = |g| = h \neq 0$ para cada $z \in \Omega$. Por lo tanto $\left|\frac{f}{g}\right| = 1$ y como $f/g \in \mathcal{H}(\Omega)$ siendo Ω conexo, se deduce que $f(z) = d \cdot g(z)$ para todo $z \in \Omega$. Como $f(a) = g(a)$, se deduce que $d = 1$ y así queda terminado el ejercicio.

b) Probaremos que si $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que $u_n = \text{Real}(f_n)$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$, si $z \in \Omega$ y $f_n(z)$ converge, entonces para todo $0 < r < d(z, \Omega^c)$ f_n converge uniformemente en $\overline{D(z,r)}$. De aquí se deducirá el resultado por un argumento de conexión. Veamos pues esto; Sea $z \in \Omega$ y $0 < r < d(z, \Omega^c)$. Tomemos $r < R < d(z, \Omega^c)$ como $K = \overline{D(z,R)} \subset \Omega$ y $u_n = \text{Real}(f_n)$ converge uniformemente sobre este compacto se deduce que la sucesión de funciones u_n esta acotada uniformemente sobre el compacto, i.e, $\exists\, M \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad \text{Real}\, f_n(z) \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall z \in K.$$

$f_n|_{D(z,R)} \in \mathcal{H}(D(z,R))$ cumpliendo $(*)$ y siendo convergente en un punto $z \in D(z,R)$. Se tiene así que $f_n|_{D(z,R)}$

es una familia normal en $\mathcal{H}(D(z,R))$. Si vemos que $f_n|_{D(z,R)}$ tiene un único punto de aglomeración entonces $f_n \xrightarrow{\mathcal{H}(D(z,R))} f$ y así en particular $f_n \to f$ convergerá uniformemente sobre $\overline{D(z,r)}$. Supongamos que $f, g \in \mathcal{H}(D(z,R))$. son dos puntos de aglomeración de la sucesión, existirán dos subsucesiones

$$f_{n_j} \xrightarrow{\mathcal{H}(D(z,R))} f \qquad f_{n_\ell} \xrightarrow{\mathcal{H}(D(z,R))} g$$

Así como $e^{f_{n_j}} \xrightarrow{\mathcal{H}(D(z,R))} e^f$ $\quad e^{f_{n_\ell}} \xrightarrow{\mathcal{H}(D(z,R))} e^g$, como por otra parte $|e^{f_n}| = e^{u_n}$ converge uniformemente sobre compactos, se tiene que

$$|e^f| = |e^g| \quad \text{en} \quad D(z,R)$$

Y así como $\frac{e^f}{e^g} \in \mathcal{H}(D(z,R))$ se deduce que $f(w) = g(w) + K \quad \forall w \in D(z,R)$

y como $g(z) = f(z)$ se deduce que $K=0$, y así queda terminado el ejercicio.

Consideremos ahora $G = \{z \in \Omega : \exists \lim_n f_n(z)\}$. Si probamos que $G = \Omega$ es claro que el ejercicio estará terminado. Ahora bien,

$G \neq \emptyset$ puesto que $a \in G$

G es abierto. No necesita demostración por lo que se ha hecho antes (en Ω).

G es cerrado en Ω. Sea $G \ni z_n \longrightarrow z \in \Omega$; el conjunto $K = \{z_n, z : n \in \mathbb{N}\}$ es un compacto contenido en Ω. Entonces consideremos $0 < \eta < d(K, \Omega^c)$. Existe n_0: $n \geq n_0$ entonces $z_n \in D(z,\eta)$, así $z \in D(z_n, \eta) \subset \Omega$ con $\eta < d(z_n, \Omega^c)$.

y así por lo que hemos probado antes $f_n(z) \longrightarrow$ converge, y por lo tanto G es cerrado en Ω y así queda terminado el ejercicio #

$\boxed{C3.27}$

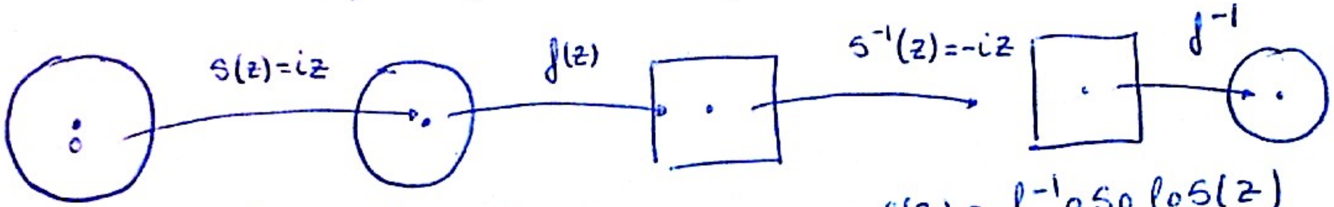
EJERCICIO 7.- Sea $f: D \longrightarrow Q$ una aplicación conforme biyectiva del disco unidad $D = \{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ sobre el cuadrado $Q = \{x+iy : |x|<1, |y|<1\}$ verificando $f(0)=0$. Probar que $f(iz) = i f(z)$ para cada $z \in D$, y deducir que en el desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad |z|<1 \quad \text{es } a_n = 0 \text{ si } (n-1) \neq \dot{4}$$

Resolución:

$$f(iz) = if(z) \iff f^{-1}(-i\, f(iz)) = z \quad \forall z \in D.$$

n° 2



$$g(z) = f^{-1} \circ S \circ f \circ S(z)$$

$$g(0) = f^{-1} \circ S \circ f \circ S.(0) = 0$$

como $g(D) \subset D$, y $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} \cdot i(-i) \cdot f'(0) = 1$

queda $g(z) = \alpha z$ con $\alpha = 1$, y así esta probado.

El resto se hace comparando, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$

$$\left.\begin{aligned} f(iz) &= \sum_{n\geq 0} i^n \cdot a_n z^n \\ if(z) &= \sum_{n\geq 0} i\, a_n\, z^n \end{aligned}\right\}.$$

$$i^n \cdot a_n = i\, a_n \implies \left.\begin{aligned} &i^{n-1} a_n = a_n. \\ &n-1 = \dot{4} \quad a_n \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ &n-1 \neq \dot{4} \quad a_n = 0 \end{aligned}\right.$$

y así queda terminado el ejercicio

C3-92

EJERCICIO 4.- Probar las siguientes cuestiones:

i) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto conexo y $u, u^2 \in A(\Omega)$ entonces $u=cte.$

ii) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo para cada. $u \in A(\Omega)$. existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ $0 \notin f(\Omega)$ tal que $u = \ln|f|$.

iii) Existe un abierto conexo Ω, y una función armonica $u \in A(\Omega)$. sin armonica conjugada en Ω.

Resolución:

i) $u, u^2 \in A(\Omega)$ entonces

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} u^2_x = 2u \cdot u_x ; & (u^2)_{xx} = 2u_x u_x + 2u\, u_{xx} \\ u^2_y = 2u\, u_y ; & (u^2)_{yy} = 2u_y^2 + 2u\, u_{yy} \end{array}\right\}$$

$$u_x^2 + u_y^2 + u(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \Rightarrow u_x^2 + u_y^2 = 0,$$

De donde $u_x = u_y = 0$, y por lo tanto $u = cte.$

ii) $u \in A(\Omega)$, $\exists$ $v \in A(\Omega)$ tal que $h = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $f = e^h$. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ $0 \notin f(\Omega)$ y $|f| = e^u$ luego

$$u = \ln|f|$$

iii) $u(z) = \ln|z|$ en $\mathbb{C} - \{0\}$ no puede tener armonica conjugada #

Si $u(z) = \ln|z|$ tuviera una armonica conjugada en $\mathbb{C} - \{0\}$, existiria $v \in A(\mathbb{C} - \{0\})$ tal que

$f(z) = \ln|z| + iv(z)$ siendo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{0\})$

Consideremos $\log z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$ la determinación principal del logaritmo en $\mathbb{C}$

Se tiene $f(z) - \log z = i\,\mathrm{Arg}(z)$ luego $f(z) - \log z = ir$ $r \in \mathbb{R}$. Así para todo $z \notin \mathbb{R}_-$

Por lo tanto $f(z) - ir = \log z$.

$e^{f(z) - ir} = z$ y como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{0\})$.

$e^{f(z) - ir} = z$ $\forall$ $z \neq 0$ lo cual es absurdo.

C3.104

Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0 ,\ |z| \leq 1\}$ y $\mathring{A}$ su interior. Sea $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua sobre A, armonica en $\mathring{A}$ y tal que $u(x) = 0$, $\forall x \in [-1,1]$. Definimos.

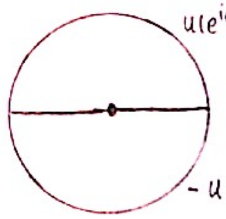
$$f(\theta) = \begin{cases} u(e^{i\theta}) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi \\ -u(e^{-i\theta}) & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

a) Probar que a lo más existe una función $v : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, armonica en $D(0,1)$ verificando $v|_A = u$.

b) Probar que existe una única función $P : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua armónica en $D(0,1)$ tal que $P(e^{i\theta}) = f(\theta)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, y que P satisface las condiciones del apartado anterior.

Resolución.-

a)



Dos v satisfaciendo a) coinciden en un conjunto con punto interior luego son iguales.

b) La función $f(e^{i\theta})$ es continua en $|z| = 1$. Así existe $P : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y armónica en $D(0,1)$ tal que, $P(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ para cada $\theta \in \mathbb{R}$.. Para terminar el ejercicio es suficiente probar que:

$$P(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \cap \overline{D(0,1)}.$$

Ahora bien,

$$0 \leq x \leq 1 \qquad P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\, d\theta$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u(\bar{e}^{i\theta}) \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\, d\theta = 0. \quad \#$$

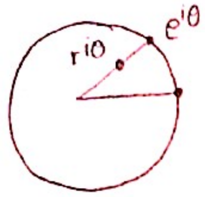
C3.10.6

Ejercicio.- Probar que $u(z) = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right)$ es armónica en $D(0,1)$ y que $\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} u(re^{i\theta}) = 0$ para cada $\theta \in [0,2\pi]$. ¿Contradice este hecho la formula integral de Poisson?

Resolución.- La función $f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ es holomorfa en $D(0,1)$ y por tanto $u \in A(D(0,1))$.

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2} = \frac{(1+z)^2(1-\bar z)^2}{(1-z)^2(1-\bar z)^2} = \frac{((1+z)(1-\bar z))^2}{|1-z|^4} = \frac{(1-|z|^2+z-\bar z)^2}{|1-z|^4} = \frac{(1-|z|^2+2iy)^2}{|1-z|^4}$$

$$= \frac{(1-|z|^2)^2-4y^2}{|1-z|^4} + i\,\frac{4y(1-|z|^2)}{|1-z|^4} \quad \text{donde } y = \mathrm{Im} z.$$

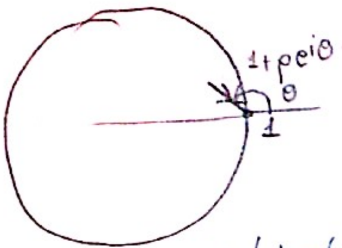


$$u(re^{i\theta}) = u(r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\theta) = \frac{4r\,\mathrm{sen}\theta\,(1-r^2)}{|1-re^{i\theta}|^4}.$$

Si $e^{i\theta} \neq 1$ entonces $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = \frac{\mathrm{sen}\theta \cdot 0}{|1-e^{i\theta}|^4} = 0.$

Si $e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \mathrm{sen}\theta = 0 \Rightarrow u(re^{i\theta}) = 0$ para cada r.

Esto no contradice la formula de Poisson porque u no admite extensión continua a $\overline{D(0,1)}$. Efectivamente en 1 no existe $\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in D(0,1)}} u(z)$. Si calculamos el limite a través de rectas



$1+\rho e^{i\theta}$ $\rho \to 0$, se tiene que

$$\lim_{\rho\to 0} u(1+\rho e^{i\theta}) = \lim_{\rho\to 0} u\left((1+\rho\cos\theta) + i\rho\,\mathrm{sen}\theta\right) =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{4\rho\,\mathrm{sen}\theta\,(1-(1+\rho\cos\theta)^2 - \rho^2\mathrm{sen}^2\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{4\rho\,\mathrm{sen}\theta\,(\cancel{1}-\cancel{1}-\rho^2\cos^2\theta - 2\rho\cos\theta - \rho^2\mathrm{sen}^2\theta)}{\rho^4} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{-4\rho\,\mathrm{sen}\theta\,(\rho^2+2\rho\cos\theta)}{\rho^4}$$

No existe salvo que θ proporcione $\mathrm{sen}\theta = 0$;

Observese que en caso de que

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z|=1 \\ \mathrm{Im}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 & |z|<1 \end{cases}$$

fuese continua, la formula integral de Poisson nos daría que $u \equiv 0$ lo cual es absurdo #

C3. 107

EJERCICIO.- Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$. Pruébese que la función $u(z) = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$. ¿Existe función armónica conjugada de u en Ω?

Resolución: u es armónica en Ω, dado que u es logaritmo del módulo de una función holomorfa que no se anula en Ω. Si u tuviese armónica conjugada en Ω, entonces $f(z) = \frac{z-a}{z-b}$ tendría logaritmo holomorfo en el mismo abierto, lo cual no es verdad dado que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

no es nula para cualquier camino γ contenido en Ω. #