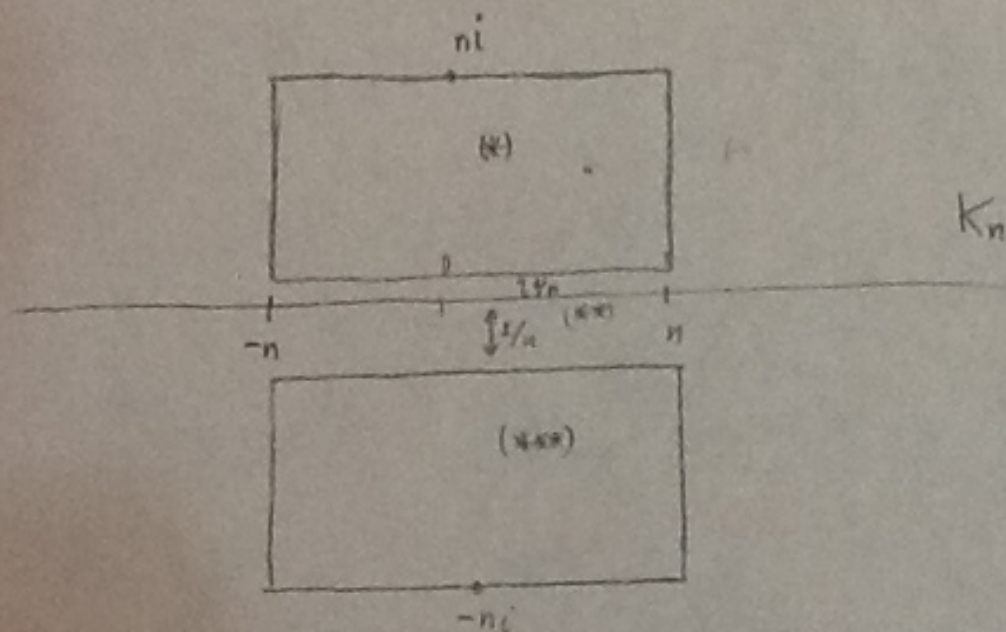


Ejercicio.- ¿Existe alguna sucesión de polinomios P_n tal que

$$\lim_n P_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Im } z > 0 \\ 0 & \text{si } z \text{ es real} \\ -1 & \text{si } \text{Im } z < 0 \end{cases} ?$$

Resolución.-



Consideremos $f_n(z) = \begin{cases} 1 & (z \in K_n) \\ 0 & (z \in \mathbb{R}) \\ -1 & (z \in K_{n+1}) \end{cases}$, entonces f_n es holomorfa en un entorno de ese compacto.

f_n en \mathbb{C} tiene una única componente conexa y así las funciones holomorfas con un polo en el ∞ , es decir los polinomios, son densos. En consecuencia existe un P_n polinomio tal que

$$|P_n(z) - f_n(z)| < 1/n \quad \text{para cada } z \in K_n.$$

De aquí se sigue que $\lim_n P_n(z)$ tiene las propiedades requeridas.