Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Variable Compleja 2011-2012
Diario de observaciones en clase

por
Luis Carlos García y Juan Ramón Balaguer.

1. Semana del 19 al 23 de Septiembre

Teorema 1.1 *(del paso por la aduana) Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$ conexo y $\Omega \subset X$ abierto tal que $A \cap \Omega \neq \emptyset$ y $A \cap Ext(\Omega) \neq \emptyset$, entonces $A \cap \partial\Omega \neq \emptyset$*

Demostración.- Supongamos que $A \cap \partial\Omega = \emptyset$, entonces

$$A = A \cap X = A \cap (\Omega \dot{\cup} Ext(\Omega) \dot{\cup} \partial\Omega) = (A \cap \Omega) \dot{\cup} (A \cap Ext(\Omega)) \dot{\cup} (A \cap \partial\Omega) = (A \cap \Omega) \dot{\cup} (A \cap Ext(\Omega))$$

como $(A \cap \Omega)$ y $(A \cap Ext(\Omega))$ son no vacios y Ω y $Ext(\Omega)$ son abiertos hemos encontrado una separación de A, lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis A es conexo. ■

Observación 1.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $a \in \partial\Omega$ un punto aislado en la frontera. Entonces, existe $r > 0$ tal que $D^*(a, r) \subset \Omega$.*

*Demostración.-*Por ser a aislado en $\partial\Omega$, $\exists r > 0$ tal que $D(a, r) \cap \partial\Omega = \{a\}$, por lo tanto $D^*(a, r) \cap \partial\Omega = \emptyset$
Además, $a \in \partial\Omega \Rightarrow D(a, r) \cap \Omega \neq \emptyset$ y como $D(a, r)$ y Ω son abiertos, su intersección también es abierta, así que no puede ser sólo $\{a\}$ por lo tanto $D^*(a, r) \cap \Omega \neq \emptyset$
Recapitulando tenemos que $D^*(a, r) \cap \partial\Omega = \emptyset$ y $D^*(a, r) \cap \Omega \neq \emptyset$
Ahora por el teorema de la aduana tomando $A = D^*(a, r)$ tenemos que $D^*(a, r) \cap Ext(\Omega) = \emptyset$ (ya que de no ser así $D^*(a, r) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$).
Como $\mathbb{C} = \Omega \dot{\cup} Ext(\Omega) \dot{\cup} \partial\Omega$, y $D^*(a, r)$ no corta al exterior ni a la frontera de Ω, debe ser que $D^*(a, r) \subset \Omega$ como queriamos probar ■

2. Semana del 26 al 30 de Septiembre

Proposición 2.1 *Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $g_n : K \to \mathbb{C}$ una sucesion de funciones que converge uniformemente a 0. Sea $f : \overline{D(0, r)} \to \mathbb{C}$ una función continua para algún $r > 0$, entonces a partir de un cierto n_1 la sucesión $f \circ g_n$ está definida y converge uniformemente a $f(0)$.*

Demostración.- Como g_n converge uniformemente a 0, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_1$ entonces $|g_n(z)| < r$ para todo $z \in K$, por tanto si $n > n_1$ tenemos que $g_n(z) \in D(0, r)$ para todo $z \in K$
Por otra parte, al ser $\overline{D(0, r)}$ un compacto, $f(z)$ es uniformemente continua sobre él, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es

Como $g_n \to 0$ uniformemente, cumple la condición de Cauchy y $\exists n_0 > n_1$ tal que si $p, q > n_0 \Rightarrow |g_p(z) - g_q(z)| < \delta$, para todo $z \in K$
Por lo que si $p, q > n_0$ se tiene también que $|f \circ g_p(z) - f \circ g_q(z)| < \varepsilon$
Es decir, $f \circ g_n(z)$ cumple la condición de Cauchy y por lo tanto converge uniformemente.

Corolario 2.2 *(que se usa en la página 5 de los apuntes con demostración) Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $g_n : K \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a 0, entonces e^{g_n} converge uniformemente a 1.*

Proposición 2.3 ***(Generalización de la proposición 2.1)***
Consideramos la sucesión de funciones $f_n : \Omega \to \Omega'$ que converge uniformemente sobre compactos de Ω, a una función $f : \Omega \to \Omega'$ continua. Sea $g : \Omega \to \mathbb{C}$ continua.
Entonces, $g \circ f_n$ converge uniformemente sobre compactos a $g \circ f$

Demostración.- Sea $K \subset \Omega$ compacto. Como f es continua, entonces $f(K) \subset \Omega'$ también es compacto. Por ello, $m = d(f(K), \mathbb{C} \setminus \Omega') > 0$
Así, existe otro compacto $K' \subset \Omega'$ tal que $d(f(K), \mathbb{C} \setminus K') = m/2$, ya que

$$\overline{\bigcup_{z \in f(K)} D(z, m/2)} \subset \Omega'$$

, además $\overline{\bigcup_{z \in f(K)} D(z, m/2)}$ es evidentemente cerrado y está acotado puesto que

$$diam \left(\overline{\bigcup_{z \in f(K)} D(z, m/2)} \right) = diam(f(K)) + m$$

y por lo tanto esta acotado, así que es compacto.

Por otra parte, como $f_n \to f$ uniformemente, existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < m/2$ para todo $z \in K$, es decir, $d(f_n(z), f(k)) < m/2$ para todo $z \in K$, por lo tanto $f_n(z) \in K'$ para todo $z \in K$.
Fijamos $\varepsilon > 0$.
Como g es continua y K' es compacto, $g|_{K'}$ es uniformemente continua. Así, para dicho ε existe $\delta > 0$ tal que si $|z - w| < \delta$ entonces $|g(z) - g(w)| < \varepsilon$ para todo $z, w \in K'$
Por otra parte, existe $n_1 > n_0$ tal que si $n > n_1$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \delta$ para todo $z \in K$.
En definitiva, si $n > n_1$, se tiene que $f_n(z)$ y $f(z)$ pertenecen a K' para todo $z \in K$ y $|f_n(z) - f(z)| < \delta$, por tanto $|g(f_n(z)) - g(f(z))| < \varepsilon$ para todo $z \in K$ como queriamos demostrar. ■

Observación 2.4 ***(de la proposición anterior)*** *Las f_n no tienen por qué ser continuas, podemos encontrar sucesiónes de funciones discontinuas que convergen uniformemente a una función continua, por ejemplo, sea $h : \Omega \to \mathbb{C}$ una función discontinua acotada, entonces $f_n = \frac{h}{n}$ converge uniformemente a 0.*

3. Semana del 3 al 7 de Octubre

Observación 3.1 *Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto, y sean $f_n : K \to \mathbb{C}$ y $g_n : K \to \mathbb{C}$ dos sucesiones de funciones que convergen uniformemente a f y g respectivamente. Si f y g están acotadas en K entonces $f_n \cdot g_n$ converge uniformemente a $f \cdot g$ sobre K.*

Demostración.- Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(z)| \leq M$ y $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in K$ que existe por hipótesis.
Como $f_n \to f$ uniformemente, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ tal que si $n > n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K$
En particular tomando $\varepsilon = 1$ $\exists n_1$ tal que si $n > n_1 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < 1, \forall z \in K$

Por tanto, para $n > n_1$

$$|f_n(z)| = |f_n(z) - f(z) + f(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z)| \leq 1 + M$$

Fijamos $\varepsilon > 0$
Como $g_n \to g$ uniformemente tenemos que $\exists n_2$ tal que si $n > n_2 \Rightarrow |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon/2(1+M)$
Como $f_n \to f$ uniformemente tenemos que $\exists n_3$ tal que si $n > n_3 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/2M$
Ahora tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ tenemos que $\forall n > n_0$

$$\begin{aligned} |f_n(z)g_n - f(z)g(z)| &= |f_n(z)g_n(z) - f_n(z)g(z) + f_n(z)g(z) - f(z)g(z)| \\ &\leq |f_n(z)||g_n(z) - g(z)| + |g(z)||f_n(z) - f(z)| \\ &< \frac{(M+1)\varepsilon}{2(1+M)} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

y eso es lo que buscábamos ■

Observación 3.2 ***(Observación de la observación)*** *Si f ó g no estan acotadas entonces puede que $f_n g_n$ no converja uniformemente a fg, por ejemplo si*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x + 1/n & \text{si } x \in (0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} x + 1/n & \text{si } x \in (0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in (0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ en } [0,1]$$
$$g_n \text{ converge uniformemente a } g = \begin{cases} x & \text{si } x \in (0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ en } [0,1]$$

pero aunque $f_n g_n$ converge puntualmente a la función $fg(x) = 1$ en $[0,1]$ no converge uniformemente.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es

Observación 3.3 ***(Otra observación de la observación 3.1)*** *Si f_n y g_n son continuas para todo n, sabemos por Analisis II que f y g serán continuas, y si son funciones continuas definidas en un compacto, estan acotadas, y por lo tanto $f_n g_n$ converge uniformemente a fg en el compacto.*

Observación 3.4 *Sea $f_n : K \to \mathbb{C}$, $g_n : K \to \mathbb{C}$ dos sucesiones de funciones que convergen uniformemente a $f : K \to \mathbb{C}$ y $g : K \to \mathbb{C}$, respectivamente. Si f está acotada ($\exists M$ tal que $|f(z)| < M \ \forall z \in K$) y existe $m > 0$ tal que $|g(z)| > m$ para todo $z \in K$, entonces a partir de un cierto n_1 la sucesión f_n/g_n está definida y converge uniformemente a f/g.*

Demostración.- La prueba es similar a la de la observación 2.1.
Como $g_n(z) \to g(z)$ uniformemente, existe n_1 tal que si $n > n_1 \Rightarrow |g_n(z) - g(z)| < m/2$ para todo $z \in K$.
Como $|a| - |b| \leq |a - b|$, tenemos que si $n > n_1$

$$0 < m/2 = m - m/2 < |g(z)| - |g_n(z) - g(z)| \leq |g_n(z)|$$

Por lo que si $n > n_1$ el cociente $f_n(z)/g_n(z)$ está bien definido.
Ahora, dado $\varepsilon > 0$

$$f_n \to f \text{ uniformemente } \Rightarrow \exists n_2 \text{ tal que si } n > n_2 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon m/4 \ , \forall z \in K$$

$$g_n \to g \text{ uniformemente } \Rightarrow \exists n_3 \text{ tal que si } n > n_3 \Rightarrow |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon m^2/4M \ , \forall z \in K$$

Por lo que si $n > \max\{n_1, n_2, n_3\} = n_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n(z)}{g_n(z)} - \frac{f(z)}{g(z)}\right| &= \left|\frac{f_n(z)g(z) - f(z)g_n(z)}{g_n(z)g(z)}\right| \\
&= \left|\frac{f_n(z)g(z) - f(z)g(z) + f(z)g(z) - f(z)g_n(z)}{g_n(z)g(z)}\right| \\
&= \left|\frac{g(z)(f_n(z) - f(z)) + f(z)(g(z) - g_n(z))}{g_n(z)g(z)}\right| \\
&= \left|\frac{f_n(z) - f(z)}{g_n(z)} + \frac{f(z)(g(z) - g_n(z))}{g_n(z)g(z)}\right| \\
&< \frac{|f_n(z) - f(z)|}{m/2} + \frac{|g(z) - g_n(z)||f(z)|}{m^2/2} \\
&< \frac{\frac{\varepsilon m}{4}}{\frac{m}{2}} + \frac{\frac{\varepsilon m^2}{4M}M}{\frac{m^2}{2}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Para todo $z \in K$. Así que f_n/g_n converge a f/g uniformemente sobre K. ■

Observación 3.5 *Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto discreto (es decir, $M' = \emptyset$). Entonces M es numerable y lo podemos escribir como $M = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ con $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ Además, si M es infinito se tiene $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.*

Demostración.- Como $\overline{D(0,1)}$ es un compacto, $M\cap\overline{D(0,1)}$ es finito (si no, M tendría un punto de acumulación).
Por tanto, podemos escribir $M\cap\overline{D(0,1)} = \{a_1,\dots a_{m_1}\}$ de modo que $|a_1|\leq|a_2|\leq\dots\leq|a_{m_1}|$
Por la misma razón, $M\cap\overline{D(0,2)}$ también es finito y por lo tanto escribimos
$M\cap\left(\overline{D(0,2)}\setminus\overline{D(0,1)}\right) = \{a_{m_1+1},\dots,a_{m_2}\}$ con $|a_{m_1+1}|\dots|a_{m_2}|$.

Podemos continual de forma inductiva en cada $M\cap\overline{D(0,n)} = \{a_1,\dots,a_{m_n}\}$.
Así, si M es finito acabaremos el proceso en algún n, y si M es infinito

$$M = M\cap\mathbb{C} = M\cap(\cup D(0,n)) = \cup(M\cap D(0,n)) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

Donde $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$ ya que si $n>m_n$ entonces $|a_n|>n$. ■

4. Semana del 10 al 14 de Octubre

Observación 4.1 *Para $0\leq x\leq 1$ tenemos que $1-x\leq e^{-x}$*

Demostración.- Sea $f(x) = e^{-x}+x-1$, entonces como $f(0)=0$ y $f'(x) = -e^{-x}+1\geq -e^0+1 = 0$ ya hemos terminado ■

En particular para $x=t/n$ con $0\leq t\leq n$, tenemos que $1-t/n\leq e^{-t/n}$ y como la funcion $g(x)=x^n$ es creciente en los positivos entonces $(1-t/n)^n\leq e^{-t}$, esta desigualdad se utiliza en la página 7 de los apuntes de funciones especiales.

Observación 4.2 *Otra forma de calcular*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Demostración.- Sea $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$, por el teorema de Fubini tenemos que:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \end{aligned}$$

Podemos calcular $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ mediante un cambio a polares:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\,e^{-r^2}drd\theta = 2\pi\int_0^{\infty} r\,e^{-r^2}dr \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{0} 1/2\,e^s ds = \pi\int_{-\infty}^{0} e^s ds = \pi(e^0 - e^{-\infty}) \\ &= \pi(1-0) = \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

■

Observación 4.3 *(se utiliza en el ejer 6 de la hoja de problemas 1)*
Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Dada una sucesión de radios ρ_n con $\lim \rho_n = \infty$, sea $M_n = \sup\{|f(z)| : |z| = \rho_n\}$. Si se verifica $\lim_{n\to\infty} M_n/\rho_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw = 0$$

para todo z. (donde $C_n(t) = \rho_n\, e^{it}$)

Demostración.- es muy parecida a una que vimos para las funciones sumadoras.

Como $\lim_{w\to\infty} w^2/(w(w-z)) = 1$, existe ρ tal que si $|w| > \rho$ entonces $|w^2/(w(w-z))| < 2$, es decir, $|1/(w(w-z))| < 2/|w^2|$ Por lo que si n es tal que $\rho_n > \rho$, podemos acotar la integral del siguiente modo:

$$\left| \int_{C_n} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw \right| \leq 2\pi \rho_n M_n 2/\rho_n^2 = 4\pi M_n/\rho_n$$

que converge a 0 ya que por hipotisis $M_n/\rho_n \to 0$ ■

Nota 4.4 *El ejercicio del la página 6 de los apuntes de funciones especiales está resuelto en los apuntes de Vera como lema 7.3.7 en la página 186*

Bonus: Por la proposición 7.3.6 en la página 185 de los apuntes de Vera tenemos que en el semiplano de parte real positiva, la derivada de la función Γ es:

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\, e^t \log{(t)} dz$$

más aún podemos calcular la derivada n-esima:

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\, e^t (\log{(t)})^n dz$$

5. Semana del 17 al 21 de Octubre

Proposición 5.1 *(Que se utiliza en la primera proposición del capítulo del principio del máximo) Sea $f : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que no cambia de signo en $[a,b]$. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, entonces $f \equiv 0$.*

Demostración.- Como f no cambia de signo, o bien $f(t) \geq 0$ ó $f(t) \leq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $f(t) \geq 0$. Suponemos, por reducción al absurdo, que f no es identicamente nula. Entonces $\exists c \in [a,b]$ tal que $f(c) > 0$.Por continuidad[1], existe $\delta > 0$ tal que $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$ por lo tanto $f(x) > \frac{f(c)}{2}$. Para todo x con $|x-c| < \delta$. Así,

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(t)dt > \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dt = \frac{f(t)}{2} 2\delta > 0$$

y esta es la contradicción que buscabamos ■

Problema 5.2 *Sea $\mathbb{M}$ el conjunto de las transformaciones de Möbius:*

$$\mathbb{M} = \{T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty : T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ \textit{donde}\ a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0\}$$

Sabemos que cada T es una biyección, tiene un único polo en $\frac{-d}{c}$ y $T \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\})$

1. *Probar que $\mathbb{M}$ es isomorfo al grupo de matrices invertibles $GL_{\mathbb{C}}(2)$, módulo producto por escalares.*

2. *Probar que en dicha correspondencia, la composicion en $\mathbb{M}$ corresponde al producto en $GL_{\mathbb{C}}(2)$*

3. *Sabemos que si $|a| < 1$ $S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \in \mathbb{M}$ es un isomorfismo del disco unidad en si mismo. Probar que $S_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$ y que $S_a^{-1} = S_{-a}$*

Indicación.- Para 1) y 2): basta probar que la aplicación $f : \mathbb{M} \to GL_{\mathbb{C}}(2)$ dada por $f(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es un homomorfismo de grupos y aplicar el primer teorema de isomorfia.
3) Es un calculo directo.

Proposición 5.3 *Si $f = u + iv$ es holomorfa en un abierto conexo Ω, entonces si u o v son constantes entonces f es constante*

Demostración.- Si u es constante entonces se tiene que $D_1 u = D_2 u \equiv 0$, por la condiciones de Cauchy-Riemann tenemos que $D_1 v = D_2 v \equiv 0$ por lo tanto dado que estamos en un conexo v es constante, así que f es constante.
Si v es constante es completamente análogo.

[1] Si $c = a$ ó $c = b$ se razona igual pero en $[c, c+\delta]$ ó $[c-\delta, c]$ en lugar de $[c-\delta, c+\delta]$

6. Semana del 24 al 28 de Octubre

Teorema 6.1 ***(Weierstrass general)*** *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto conexo y $D \subset \Omega$ es discreto en Ω, entonces existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\mathcal{Z}(f) = D$*

Problema 6.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que no existe otro abierto conexo $\Omega' \supset \Omega$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega')$ tal que $g|_\Omega \equiv f$*
(es decir, Ω es dominio de holomorfía de f).

Demostración.- Lo hicimos en clase para el caso $\Omega = D(0,1)$. Vamos a tratar de generalizarlo.

Puesto que $\partial\Omega$ es separable[2], existe una sucesion $\{z_n\}$ tal que $\overline{\{z_n\}} = \partial\Omega$.
Sabemos que existe una sucesión creciente de compactos $K_n \subset \Omega$ de modo que $\Omega = \cup K_n$ y $K_n \subset int(K_{n+1})$ (Vera A.2.1)
Eso nos va a permitir escoger sucesiones $(y_n^k)_k \subset \Omega$ de modo que $y_n^k \xrightarrow{k} z_n$ y $\{y_n^k\}_{n,k}$ no se acumule:

- Para K_1:
  $d(z_1, K_1) = \text{ínf}\{|z_1 - z| : z \in K_1\} = |z_1 - y_1^1|$ por ser K_1 compacto, con $y_1^1 \subset K_1 \subset \Omega$
- Para K_2:
  $d(z_1, K_2) = \text{ínf}\{|z_1 - z| : z \in K_2\} = |z_1 - y_1^2|$
  $d(z_2, K_2) = \text{ínf}\{|z_2 - z| : z \in K_2\} = |z_2 - y_2^1|$

En general, en cada K_n escogemos y_i^j que «aproximen» a z_i para $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$d(z_i, K_n) = \text{ínf}\{|z_i - z| : z \in K_n\} = |z_i - y_i^{n-i+1}|$$

Observemos que en cada paso, los y_i^j elegidos pertenecen a ∂K_n (el mínimo no puede alcanzarse en el interior, o si no habría otros puntos más proximos). Como $K_n \subset int(K_{n+1})$, tenemos en cada K_n sólo hay una cantidad finita de y_i^j, los producidos hasta el paso n.

De este modo $\text{lím}_k\, y_n^k = z_n$, ya que

$$|z_n - y_n^k| = d(z_n, K_{n+k-1}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ya que $K_{n+k-1} \nearrow \Omega$ y $d(z_n, \Omega) = 0$ ya que $z_n \in \partial\Omega$.
Además, los $\overline{\{y_n^k\}}$ no se acumulan en Ω ya que cada K_n sólo tienen una cantidad finita de ellos[3].
Ahora, el teorema de Weierstrass general nos dice que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\mathcal{Z}(f) = \{y_n^k\}$.

---

[2] En general no es cierto que un subespacio de un espacio separable sea separable. Sin embargo, $\mathbb{C}\ 2A\mathbb{N} \Rightarrow \partial\Omega\ 2A\mathbb{N} \Rightarrow \partial\Omega$ separable

[3] Si se acumulasen en $a \in \Omega$, existiría $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ con infinitos $\{y_n^k\}$, pero $\overline{D(a,r)} \subset \cup K_n \Rightarrow \overline{D(a,r)} \subset K_{n_1} \cup \ldots \cup K_{n_i} = K_{n_j}$ para algún j entre 1 e i, y esa es la contradicción buscada

Esta f no se puede «prolongar», ya que si $\Omega' \supset \Omega$ entonces existe $z_{n_0} \subset \Omega'$ que es punto de acumulacion de ceros de f, los $\{y_{n_0}^k\}$. Así que si $g \in \mathcal{H}(\Omega')$, $g|_\Omega \equiv f$ implica por el principio de identidad que $g \equiv 0$ y esto es una contradicción ya que f no es identicamente nula. ■

Observación 6.3 *(Pequeña modificación de un corolario al principio del máximo) Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua cuya restrición al interior de K, Ω, es holomorfa. Entonces existe a en la frontera de K tal que:*

$$\Re f(a) = \max\{\Re z : z \in K\}$$

Demostración.- Apenas hay que modificar la demostración del corolario: Como f es continua en un compacto, $\Re f$ también lo es. Así, existe $b \in K$ tal que $\Re b = \max\{\Re z : z \in K\}$

- Si b está en la frontera de K, tomamos $a = b$ y se acaba la prueba.
- Si b está en el interior de K, vamos a encontrar a en frontera de K tal que $f(a) = f(b)$. Supongamos que $b \in \Omega$, y sea Ω_b la componente conexa de b en Ω. Como Ω_b es conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega_b)$ y b es un maximo para $\Re f$ (que es subarmónica), la proposición 5.3 nos dice que $\Re f$ es constante. Pero ahora las ecuaciones de Cauchy Riemann (ver ejercicio anterior) o el teorema de la aplicación abierta nos dicen que f es constante en Ω_b : $f(z) = cte = f(b)$ para todo z en Ω_b. A partir de aquí se razona igual que en el corolario de los apuntes.

■

7. Semana del 31 de Octubre al 4 de Noviembre

Problema 7.1 *(3º de l Hoja 2) Sea f una función entera no constante. Pruébese que la función $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, definida en $[0, +\infty)$, es creciente continua y $\lim_{r\to\infty} M(r) = +\infty$*

El ejercicio lo hemos hecho en clase, aquí vamos a probar la continuidad de otro modo. Fijamos $r > 0$. Como f es continua, es uniformemente continua en $\overline{D(0, 2r)}$. Así, fijado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Sea $R > 0$ con $|R - r| < \delta$ y veamos que $|M(R) - M(r)| < \varepsilon$. Sabemos que existen b y a con $|b| = R, |a| = r$ tales que $M(R) = |f(b)|, M(r) = |f(a)|$. Supongamos primero que $R > r$. Sea $c = \frac{r}{R}b$, que tiene $|c| = r$, por lo que $|f(c)| \leq |f(a)|$. Además, $|b - c| = |(1 - \frac{r}{R})b| = |R - r| < \delta$, asi que $|f(b) - f(c)| < \varepsilon$. Como M es creciente,

$$|M(R) - M(r)| = M(R) - M(r) = |f(b)| - |f(a)| \leq |f(b)| - |f(c)| \leq |f(b) - f(c)| < \varepsilon$$

Si $r < R$ se hace el mismo razonamiento intercambiando los papeles de R y r. Por tanto, M es continua β.

Proposición 7.2 *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es diferenciable en $a \in \Omega$ con $df(a) \neq 0$, son equivalentes:*
a) *f conserva ángulos orientados en a*
b) *f es derivable en sentido complejo y $f'(a) = 0$ (e.d. $df(a)$ conserva áng. orientados)*

Demostración.- Faltaba el caso 2 de "$a) \Rightarrow b)$".
Supongamos que $L = df(a)$ no es inyectiva. Como $L \neq 0$, entonces $\ker L =$ una recta $= \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$, para un cierto w, con $|w| = 1$.
Además, por el mismo razonamiento anterior:
$L(u) = ru + s\overline{u}$ Si $|u| = 1 \Rightarrow \frac{L(u)}{u} = r + s\frac{\overline{u}}{u} \Rightarrow \left\{\frac{L(u)}{u} : |u| = 1\right\} \subset$ Circunferencia de centro r y radio $|s|$
Ahora, si tomo u con $|u| = 1$ y $u \neq \pm w$ tengo que $L(u) \neq 0$ y como f conserva ángulos:

$$\begin{aligned} c &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu) - f(a)}{u|f(a+tu) - f(a)|} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{u}\frac{f(a+tu) - f(a)}{t}\left|\frac{t}{f(a+tu) - f(a)}\right| \\ &= \frac{1}{u}\frac{L(u)}{|L(u)|} \end{aligned}$$

Por lo que en tal caso $\frac{L(u)}{u} \in$ Recta $= \{tc : t \in \mathbb{R}\}$.
Como pertenece a una recta y a una circunferencia, tenemos

$$\frac{L(u)}{u} = \pm\mu \ \forall u \ |u| = 1,\ u \neq \pm w \text{ para un cierto } \mu \text{ con } |\mu| = 1$$

Como $L(w) = 0$, tenemos que definiendo

$$h(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = \pm w \\ 1 & \text{si } L(u)/u = +\mu \\ -1 & \text{si } L(u)/u = -\mu \end{cases}$$

tenemos $h : \mathbb{S}^1 \to \{0, 1, -1\}$ que verifica $L(u) = h(u)\mu u \ \forall u \in \mathbb{S}^1$. Así, $h(u) = \frac{L(u)}{\mu u}$ debe ser una función continua en $\mathbb{S}^1$ por ser cociente de funciones continuas.
Pero eso es una contradicción con el modo en que está definida y este caso no puede darse.

■

8. Semana del 7 al 11 de Noviembre

Teorema 8.1 (Runge) *Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto, $A \subset \mathbb{C}_\infty$ que contiene al menos un punto en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$, y $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto con $K \subset \Omega$. Entonces, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, existe una sucesion (R_n) de funciones racionales con todos sus polos en A de modo que $R_n \to f$ uniformemente en K.*

Corolario 8.2 *En las condiciones anteriores, si $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo entonces existe una sucesión (p_n) de polinomios de modo que $p_n \to f$ uniformemente en K.*

Demostración.- Al ser $\mathbb{C} \setminus K$ conexo su única componente conexa es no acotada, así que podemos tomar $A = \{\infty\}$. Pero las únicas funciones racionales que sólo tienen polos en ∞ son los polinomios (ya que si $R = \frac{P}{Q}$ con Q no constante, podemos suponer $\mathcal{Z}(P) \cap \mathcal{Z}(Q) = \emptyset$ y en tal caso $Pol(R) \supset \mathcal{Z}(Q) \neq \emptyset$). ■

Este resultado anterior se utiliza para construir una sucesión de funciones holomorfas que no converge a una función continua:
`http://webs.um.es/beca/Docencia/1112.ac/LimitesPuntualesFuncionesAnaliticas.pdf`

Ejercicio 8.3 *La ecuación general de una circunferencia en $\mathbb{C}_{infty}$ es $Az\overline{z} + Bz + C\overline{z} + D = 0$ con $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$ y $AD - BC < 0$*

- *Si $A = 0$ corresponde a una circunferencia que pasa por el ∞ (es decir, una recta en $\mathbb{C}$)*
- *Si $A \neq 0$, es una "verdadera circunferencia" de centro $-\frac{C}{A}$ y radio $\frac{\sqrt{BC-AD}}{|A|}$.*

Demostración.- Basta partir de la ecuación de una recta en $\mathbb{C}$: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ y sustituir $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2}$.
O bien a partir de la ecuación de una circunferencia: $|z - z_0| = \rho \to (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0) = \rho^2$ y operar. Está hecho con detalle en la proposicion 1.3.1 de los apuntes de Vera.

Proposición 8.4 *La proyección estereográfica transforma rectas y círculos de $\mathbb{C}_\infty$ en circunferencias de S.*
La proyección estereográfica conserva ángulos orientados.

- La primera parte está hecha con detalle en el ejercicio 1.5.4 de los apuntes de Vera. También podeis ver el siguiente video:
`http://ventanaaluniverso.wordpress.com/2011/11/12/diario-de-complejo/`
- La segunda parte la vimos el año pasado en Geometría Diferencial, es consecuencia de una caracterización de las aplicaciones conformes en términos de la primera forma fundamental. Se puede consultar en el Ejemplo 3.23 del libro de Pastor.

9. Semana del 21 al 25 de Noviembre

Problema 9.1 *1. Pruébese que una transformación de Möbius T deja fijo $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ si, y sólo si, T puede escribirse como*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ ad - bc \neq 0$$

2. *Dedúzcase de lo anterior que la definición de simetría respecto de un círculo dada a través de la razón doble, es independiente de los tres puntos distintos elegidos en el círculo.*

3. *Pruébese con un argumento de conexión que si T es una transformación de Möbius que lleva una recta en una circunferencia y un punto de un semiespacio determinado por la recta va al interior del disco determinado por la circunferencia, entonces la imagen de ese semiespacio es exactamente el interior de la circunferencia*

Resolución.-

1. Escribimos $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$

   - Si $c \neq 0$: Podemos escribir $T(z) = \frac{a'z+b'}{z+d'}$ con $a'd' - b' \neq 0$
     $T(\infty) = a' \in \mathbb{R}$
     $T(-d') = \infty \to -d' \in \mathbb{R}$
     - Si $a' \neq 0 \to T(-b'/a') = 0 \to -b'/a' \in \mathbb{R} \to b' \in \mathbb{R}$
     - Si $a' = 0 \to b' = 0$
   - Si $c = 0$: Podemos escribir $T(z) = a'z + b'$
     $T(0) = b' \in \mathbb{R}$
     $T(1) = a' + b' \in \mathbb{R} \to a' \in \mathbb{R}$

2. Sean $z_2, z_3, z_4, w_2, w_3, w_4 \in C$, supongamos que $(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}$ $(*)$
   y veamos que $(z, w_2, w_3, w_4) = \overline{(z^*, w_2, w_3, w_4)}$.
   Tenemos que $(z, z_2, z_3, z_4) = S(z)$ con $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0, S(z_4) = \infty$
   y $(z, w_2, w_3, w_4) = R(z)$ con $R(w_2) = 1, R(w_3) = 0, R(w_4) = \infty$

   Por $(*)$, tenemos $S(z) = \overline{S(z^*)} \Rightarrow R(z) = R \circ S^{-1}(S(z)) = R \circ S^{-1}(\overline{S(z^*)})$
   Como $R \circ S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\} = R(C)) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, lo anterior nos dice que $R \circ S^{-1}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
   $a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow R \circ S^{-1}(\overline{z}) = \overline{R \circ S^{-1}(z)} \Rightarrow R(z) = R \circ S^{-1}(\overline{S(z^*)}) = R \circ \overline{S^{-1}(S(z^*))} = R(z^*)$

3. Sea R una recta, C una circunferencia y T tal que $T(R) = C$. Sea H un semiespacio determinado por R y D tal que $\partial D = C$.
   Por hipotesis, $\exists a \in H$ con $T(a) \in D$. Así, $T(H) \cap D \neq \emptyset$. Sin embargo, $T(H) \cap \partial D = \emptyset$ (ya que T es biyección y $T(R) = C = \partial D$) . Entonces el teorema del paso por la aduana nos dice que $T(H) \cap ExtD = \emptyset$, y por tanto $T(H) \subset D$.
   Un razonamiento análogo para T^{-1} nos da $T^{-1}(D) \subset H \Rightarrow D \subset T(H) \Rightarrow D = T(H)$

10. Semana del 5 al 11 de Diciembre

Observación 10.1 *En un espacio métrico compacto (X, d) una sucesión $(x_n)_n$ converge si y sólo si $(x_n)_n$ tiene un único punto de aglomeración.*

Demostración.- Es consecuencia directa de la defición de límite y de que X sea T_2 que $(x_n)_n$ sólo puede tener un punto de aglomeración. En cuanto al recíproco, sea (x_n) sucesión en X y a su único punto de aglomeración. Supongamos que x_n no converge a a. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión x_{n_k} tal que $|x_{n_k} - a| > \varepsilon$. Por ser X compacto, x_{n_k} tiene una subsucesión $x_{n_{k_l}}$ convergente a b y debe ser $b \neq a$. Pero eso es imposible, porque b sería otro punto de aglomeración de la sucesión de partida.

Observación 10.2 *La observación anterior no es cierta si X no es compacto. Basta tomar $X = \mathbb{R}$ y $x_n = 1/n$ si n es par y $x_n = n$ si n es impar.*

11. Semana del 12 al 16 de Diciembre

Soluciones del control.

1. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\mathbb{T}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ para $r > 0$. Entonces:

   a) Si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{T}_1$ y f es no constante, entonces f se anula en $D(0,1)$ - Correcta

   $|f|$ alcanza el mínimo en $D(0,1)$ ya que si lo alcanzara en $\mathbb{T}_1$ sería constante dado que el máximo se alcanza en $\mathbb{T}_1$ por el pricipio del módulo máximo, así que tenemos que que $|f|$ no se anula y tiene un mínimo en $D(0,1)$, invertimos y consideramos la función $1/f$, esta funcion es holomorfa dado que f no se anula y $|1/f|$ tiene un máximo en $D(0,1)$ dado que $|f|$ tenía un mínimo, pero si tiene un máximo en $D(0,1)$ entonces es constante por el principio del módulo máximo, y esto no puede ser, así que f se anula en $D(0,1)$

   b) Si $f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{T}_{\frac{1}{2}} = \emptyset$, entonces f es constante - Correcta

   Es correcto por el teorema de Liouville, ya que podemos tener dos casos:

   - Si va dentro de $D(0,1/2)$ tenemos que esta acotada, $|f(z)| < \frac{1}{2}$, y como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es entera utilizando el teorema de Liouville tenemos que f es constante.
   - Si va fuera de $D(0,1/2)$, $|1/f| \leq 2$ y como $1/f$ es entera ya que f no se anula tenemos de nuevo por el teorema de Liouville que $1/f$ es constante y por lo tanto f es constante

   c) Si $\sup_{z\in\mathbb{T}_r} |f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{T}_R} |f(z)|$ para $r, R > 0$ entonces $f(\mathbb{T}_R) = f(\mathbb{T}_r)$ - Correcta

   Si $R = r$ ya hemos terminado, podemos suponer que $0 < r < R$:
   $\max_{\overline{D(0,r)}} |f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{T}_r} |f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{T}_R} |f(z)| = \max_{\overline{D(0,R)}} |f(z)|$ por lo tanto el máximo se alcanza en el interior de $D(0,R)$ y por lo tanton f es constante y así $f(\mathbb{T}_R) = f(\mathbb{T}_r)$

   d) Si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|f(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$ entonces f es constante - Incorrecta

Si consideramos $f(z) = z$, tenemos que $0 \leq \text{ínf}\,|f(z)|$, en este caso tendríamos $z_0 = 0$ y $f(z) = z$ no es constante

e) Si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ con $Re\ f(z_0) = \text{ínf}_{z\in\mathbb{C}}\, Re\ f(z)$ entonces f es constante - Correcta

Consideremos $-f$, es holomorfa y $Re\ -f$ alcanza un máximo dado que $Re\ f$ alcanzaba un mínimo, así que $-f$ es constante, y por lo tanto f es constante

f) Ninguna de las anteriores - Incorrecta (se deja como ejercicio al lector)

2. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones enteras que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. Entonces:

a) f es entera - Correcta

Por el teorema de Weierstrass tenemos una función holomorfa definida en todo $\mathbb{C}$ y por lo tanto es una función entera

b) Si f no se anula en $\mathbb{C}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se tiene que f_n no se anula en $\mathbb{C}$ - Incorrecta

Tomamos $f(z) = e^z$ (que no se anula), y si consideramos $f_n(z) = \sum^n \frac{z^j}{j!}$ (que se anula dado que es un polinomio) pero f_n converge uniformemente sobre compactos a f

c) Si f no se anula en $\mathbb{C}$, y $R > 0$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se tiene que f_n no se anula en $D(0, R)$ - Correcta

Consecuencia directa del teorema de Hurwitz

d) Si cada f_n tiene un número finito de ceros en $\mathbb{C}$, entonces f tiene un número finito de ceros en $\mathbb{C}$ - Incorrecta

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con infinitos ceros (por ejemplo $f(z) = \text{sen}(z)$), entonces $f(z) = \text{lím}_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = \text{lím}_{n\to\infty} P_n(z)$, donde $P_n(z)$ es un polinomio y por lo tanto tiene un número finito de ceros.

e) Si el número de ceros en $\mathbb{C}$ de cada f_n esta acotado por M y f no es identicamente nula tiene a lo más M ceros en $\mathbb{C}$ - Correcta
Supongamos que el número de ceros de f es mayor que M, entonces para algún $R > 0$ el número de ceros de f en $D(0, R)$ es mayora que M. Como $\mathcal{Z}(f)$ es discreto podemos suponer que f no se anula en $|z| = R$ por lo tanto por el teorema de Hurwitz existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f_n y f tienen en $D(0, R)$ el mismo número de ceros (contradicción)

f) Ninguna de las anteriores - Incorrecta (se deja como ejercicio al lector)

3. Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   a) Si T es una transformación de Möbius tal que $T(\overline{x}) = \overline{T(x)}$ para todo $x \in (0,1)$ entonces $T(\overline{z}) = \overline{T(z)}$ para cada $z \in \mathbb{C}$ - Correcta

   Como los $x \in (0,1)$ son reales, cumplen $T(x) = T(\overline{x}) = \overline{T(x)}$, es decir, $T(x) \in \mathbb{R}$. Así, si tomamos tres puntos arbitrarios en $(0,1)$ sus imágenes están en la recta real. Por tanto, T lleva la recta real en sí misma. Por el problema 9.1 de este diario, $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Por tanto,

   $$T(\overline{z}) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} = \frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}} = \overline{T(z)}$$

   que es lo que buscábamos.

   b) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto simplemente conexo, distinto de $\mathbb{C}$ y simétrico respecto del eje real, existe una biyección holomorfa f de Ω sobre $D(0,1)$ tal que $f(\{z \in \Omega : \Im z > 0\}) = \{z \in D(0,1) : \Im z > 0\}$ - Correcta

   La demostración se puede ver en la página siguiente.

EJERCICIO.- 14.

3.163.- Sea G una región simplemente conexa. que no es todo el plano, y supongamos que $\bar{z} \in G$ cuando $z \in G$. Sea $a \in \mathbb{R} \cap G$ y supongamos que $f: G \longrightarrow D$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ es una función uno a uno y analítica con $f(a) = 0$ $f'(a) > 0$. y $f(G) = D$. Sea $G_+ = \{z \in G : \operatorname{Im} z > 0\}$. Probar que $f(G_+)$ debe estar enteramente por arriba ó por debajo del eje real.

Resolución: Mas precisamente se puede precisar el ejercicio poniendo que $f(G_+)$ es un semicirculo abierto, y $f(G_-) = f(\{z \in G : \operatorname{Im} z < 0\})$ es el otro semicirculo. Para ver esto probaremos previamente que $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ para todo $z \in G$. Consideremos pues la función:

$$g: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & D \\ z & \longmapsto & \overline{f(\bar{z})} \end{array}$$

g es una función holomorfa, inyectiva, con $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$; como tambien es sobre, puesto que si $\alpha \in D$, $\exists$ un $w \in G$ tal que

$$D \ni \bar{\alpha} = f(w) = f(\bar{\bar{w}})$$

poniendo $z = \bar{w} \in G$ queda que $\alpha = \overline{f(\bar{z})}$ y se obtiene la sobreyectividad. Por lo tanto como las condiciones $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$ determinan univocamente la funcion holomorfa biyectiva de G sobre D, queda claro que $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Para terminar la demostración observemos que de esta condición se deduce que

$$f(x) \in \mathbb{R} \cap D(0,1) \quad \text{sii} \quad x \in G \cap \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$ Evidente ya que en este caso $f(x) = \overline{f(x)}$.

$\Rightarrow$ Si $f(x) \in \mathbb{R} \cap D(0,1)$ entonces $f(x) = \overline{f(x)} = \overline{f(\bar{x})}$ de donde $f(x) = f(\bar{x})$ y por inyectividad $x = \bar{x}$ de donde $x \in G \cap \mathbb{R}$.

Ahora ya solo falta observar que $G_+ = \{z \in G : \operatorname{Im} z > 0\}$ y G_- son conexos y abiertos. (Ver nota dorso). Así si existe $z_1 \in G_+$ con $\operatorname{Im} f(z_1) > 0$, se tendra que

$$f(G_+) \subset \{\text{Componente conexa } (f(z_1)) \text{ en } D(0,1) - \mathbb{R} \cap D(0,1)\} = D_+$$

y como $f: G - (G \cap \mathbb{R}) \longrightarrow D - (D \cap \mathbb{R})$ es un homeomorfismo, es claro que lleva componentes conexas a componentes conexas, quedando así que

$$f(G_+) = D_+ \quad y \quad f(G_-) = D_-$$

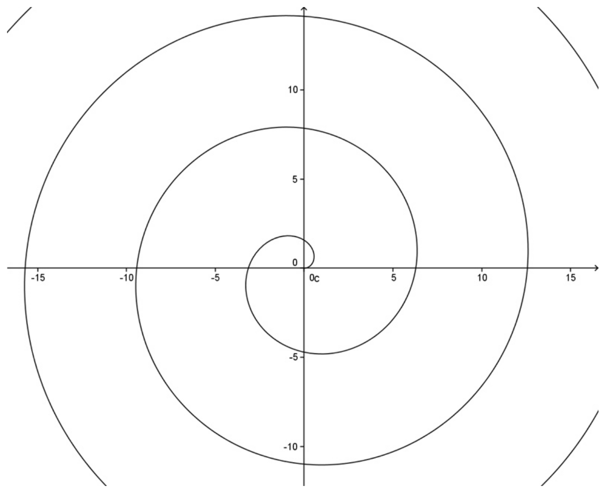
\#

NOTA: Si $G = \bar{G}$ es conexo la aplicacion

$$\varphi : G \ni z \longrightarrow \begin{cases} z & \text{si } z \in G_+ \cup (\mathbb{R} \cap G) \\ \bar{z} & \text{si } z \in G_- \cup (\mathbb{R} \cap G) \end{cases}$$

es continua con $\varphi(G) = G_+ \cup G \cap \mathbb{R}$ que es por tanto conexo, o razonando de otra forma.

c) $D(0,1)$ es conformemente equivalente a $\mathbb{C} - \{xe^{ix} : x \geq 0\}$ - Correcta



Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\varphi(x) = xe^{ix} = x\cos(x) + i\sin(x)$. Es claro que φ es continua. Así, $\varphi([0,+\infty))$ es un conjunto conexo y no acotado de $\mathbb{C}$. Por ello, $\varphi([0,+\infty)) \cup \{\infty\}$ es un conexo de $\mathbb{C}_\infty$. De este modo, $\mathbb{C}_\infty - (\mathbb{C} - \varphi([0,+\infty))) = \varphi([0,+\infty)) \cup \{\infty\}$ es conexo. Por la caracterización de los abiertos simplemente conexos, se sigue que $\mathbb{C} - \varphi([0,+\infty))$ es simplemente conexo. Y por el teorema de Riemann, tenemos que es conformente equivalente a $D(0,1)$.

d) Cualesquiera dos coronas no degeneradas son conformemente equivalentes - Incorrecta

Dos coronas son conformemente equivalentes si y sólo si la relación entre sus radios es la misma. La demostración se puede ver el las páginas siguientes.

e) $D(0,1) - \{0\}$ es conformemente equivalente a $D(0,1) - \{0, 1/2\}$ - Incorrecta

Supongamos que existiese una biyección holomorfa $f : D(0,1) - \{0\} \to D(0,1) - \{0, 1/2\}$. Por ser la imagen un conjunto acotado, f debe tener una singularidad evitable en 0, podemos extender f y definir una nueva biyección $\tilde{f} : D(0,1) \to D(0,1) - \{0, 1/2\} \cup \{p\}$, donde $p = \tilde{f}(0)$. Pero eso es imposible porque el dominio es conexo mientras que la imagen no.

f) Ninguna de las anteriores - Incorrecta (se deja como ejercicio al lector)

14.20 Remarks

(*a*) *The preceding theorem has a purely topological corollary: If every boundary point of a bounded simply connected plane region Ω is simple, then the boundary of Ω is a Jordan curve, and $\overline{\Omega}$ is homeomorphic to $\overline{U}$.*

(A Jordan curve is, by definition, a homeomorphic image of the unit circle.)

The converse is true, but we shall not prove it: If the boundary of Ω is a Jordan curve, then every boundary point of Ω is simple.

(*b*) Suppose f is as in Theorem 14.19, a, b, and c are distinct boundary points of Ω, and A, B, and C are distinct points of T. There is a linear fractional transformation φ which maps the triple $\{f(a), f(b), f(c)\}$ to $\{A, B, C\}$; suppose the orientation of $\{A, B, C\}$ agrees with that of $\{f(a), f(b), f(c)\}$; then $\varphi(U) = U$, and the function $g = \varphi \circ f$ is a homeomorphism of $\overline{\Omega}$ onto $\overline{U}$ which is holomorphic in Ω and which maps $\{a, b, c\}$ to prescribed values $\{A, B, C\}$. It follows from Sec. 14.3 that g is uniquely determined by these requirements.

(*c*) Theorem 14.19, as well as the above remark (*b*), extends without difficulty to simply connected regions Ω in the Riemann sphere S_2, all of whose boundary points are simple, provided that $S^2 - \Omega$ has a nonempty interior, for then a linear fractional transformation brings us back to the case in which Ω is a bounded region in the plane. Likewise, U can be replaced, for instance, by a half plane.

(*d*) More generally, if f_1 and f_2 map Ω_1 and Ω_2 onto U, as in Theorem 14.19, then $f = f_2^{-1} \circ f_1$ is a homeomorphism of $\overline{\Omega}_1$ onto $\overline{\Omega}_2$ which is holomorphic in Ω_1.

Conformal Mapping of an Annulus

14.21 It is a consequence of the Riemann mapping theorem that any two simply connected proper subregions of the plane are conformally equivalent, since each of them is conformally equivalent to the unit disc. This is a very special property of simply connected regions. One may ask whether it extends to the next simples situation, i.e., whether any two annuli are conformally equivalent. The answer is negative.

For $0 < r < R$, let

$$A(r, R) = \{z : r < |z| < R\} \tag{1}$$

be the annulus with inner radius r and outer radius R. If $\lambda > 0$, the mapping $z \to \lambda z$ maps $A(r, R)$ onto $A(\lambda r, \lambda R)$. *Hence $A(r, R)$ and $A(r_1, R_1)$ are conformally equivalent if $R/r = R_1/r_1$.* The surprising fact is that this sufficient condition is also necessary; thus among the annuli there is a different conformal type associated with each real number greater than 1.

14.22 Theorem *$A(r_1, R_1)$ and $A(r_2, R_2)$ are conformally equivalent if and only if $R_1/r_1 = R_2/r_2$.*

PROOF Assume $r_1 = r_2 = 1$, without loss of generality. Put

$$A_1 = A(1, R_1), \qquad A_2 = A(1, R_2), \tag{1}$$

and assume there exists $f \in H(A_1)$ such that f is one-to-one and $f(A_1) = A_2$. Let K be the circle with center at 0 and radius $r = \sqrt{R_2}$. Since $f^{-1}: A_2 \to A_1$ is also holomorphic, $f^{-1}(K)$ is compact. Hence

$$A(1, 1 + \epsilon) \cap f^{-1}(K) = \varnothing \tag{2}$$

for some $\epsilon > 0$. Then $V = f(A(1, 1 + \epsilon))$ is a connected subset of A_2 which does not intersect K, so that $V \subset A(1, r)$ or $V \subset A(r, R_2)$. In the latter case, replace f by R_2/f. So we can assume that $V \subset A(1, r)$. If $1 < |z_n| < 1 + \epsilon$ and $|z_n| \to 1$, then $f(z_n) \in V$ and $\{f(z_n)\}$ has no limit point in A_2 (since f^{-1} is continuous); thus $|f(z_n)| \to 1$. In the same manner we see that $|f(z_n)| \to R_2$ if $|z_n| \to R_1$.

Now define

$$\alpha = \frac{\log R_2}{\log R_1} \tag{3}$$

and

$$u(z) = 2 \log|f(z)| - 2\alpha \log|z| \qquad (z \in A_1). \tag{4}$$

Let ∂ be one of the Cauchy-Riemann operators. Since $\partial \bar{f} = 0$ and $\partial f = f'$, the chain rule gives

$$\partial(2 \log|f|) = \partial(\log(\bar{f}f)) = f'/f, \tag{5}$$

so that

$$(\partial u)(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\alpha}{z} \qquad (z \in A_1). \tag{6}$$

Thus u is a harmonic function in A_1 which, by the first paragraph of this proof, extends to a continuous function on $\bar{A}_1$ which is 0 on the boundary of A_1. Since nonconstant harmonic functions have no local maxima or minima, we conclude that $u = 0$. Thus

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z} \qquad (z \in A_1). \tag{7}$$

Put $\gamma(t) = \sqrt{R_1}\, e^{it}$ $(-\pi \le t \le \pi)$; put $\Gamma = f \circ \gamma$. As in the proof of Theorem 10. 43, (7) gives

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \text{Ind}_\Gamma\ (0). \tag{8}$$

Thus α is an integer. By (3), $\alpha > 0$. By (7), the derivative of $z^{-\alpha}f(z)$ is 0 in A_1. Thus $f(z) = cz^\alpha$. Since f is one-to-one in A_1, $\alpha = 1$. Hence $R_2 = R_1$. ////

xercises

1 Find necessary and sufficient conditions which the complex numbers a, b, c, and d have to satisfy so that the linear fractional transformation $z \to (az + b)/(cz + d)$ maps the upper half plane onto itself.

2 In Theorem 11.17 the hypotheses were, in simplified form, that $\Omega \subset \Pi^+$, L is on the real axis, and $\text{Im } f(z) \to 0$ as $z \to L$. Use this theorem to establish analogous reflection theorems under the following hypotheses:

(*a*) $\Omega \subset \Pi^+$, L on real axis, $|f(z)| \to 1$ as $z \to L$.

(*b*) $\Omega \subset U$, $L \subset T$, $|f(z)| \to 1$ as $z \to L$.

(*c*) $\Omega \subset U$, $L \subset T$, $\text{Im } f(z) \to 0$ as $z \to L$.

In case (*b*), if f has a zero at $\alpha \in \Omega$, show that its extension has a pole at $1/\bar{\alpha}$. What are the analogues of this in cases (*a*) and (*c*)?

3 Suppose R is a rational function such that $|R(z)| = 1$ if $|z| = 1$. Prove that

$$R(z) = cz^m \prod_{n=1}^{k} \frac{z - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n z}$$

where c is a constant, m is an integer, and $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ are complex numbers such that $\alpha_n \ne 0$ and $|\alpha_n| \ne 1$. Note that each of the above factors has absolute value 1 if $|z| = 1$.

4 Obtain an analogous description of those rational functions which are positive on T.

Hint: Such a function must have the same number of zeros as poles in U. Consider products of factors of the form

$$\frac{(z - \alpha)(1 - \bar{\alpha}z)}{(z - \beta)(1 - \bar{\beta}z)}$$