

Universidad  
de Murcia

Facultad de  
Matemáticas

Control: Análisis Complejo

13 Diciembre de 2011

Alumna/o:

**TEORÍA (4 puntos)**

Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto y  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ . Pruébese que si  $\mathcal{F}$  es acotado entonces es relativamente compacto en  $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$ .



**Cuestiones Teóricas:** Cada cuestión vale **1.5 puntos**. Marcar las soluciones correctas en cada cuestión: no es necesario escribir explicación alguna.

1. Sea  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  y  $\mathbb{T}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$  para  $r > 0$ . Entonces:

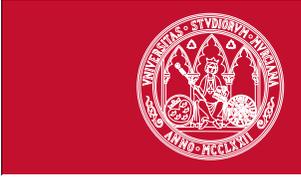
- a) Si  $|f(z)| = 1$  para todo  $z \in \mathbb{T}_1$  y  $f$  es no constante, entonces  $f$  se anula en  $D(0, 1)$ ; \_\_\_\_\_ **Correcta**
- b) Si  $f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{T}_{\frac{1}{2}} = \emptyset$ , entonces  $f$  es constante; \_\_\_\_\_ **Correcta**
- c) si  $\sup_{z \in \mathbb{T}_r} |f(z)| = \sup_{z \in \mathbb{T}_R} |f(z)|$  para  $R, r > 0$  entonces  $f(\mathbb{T}_R) = f(\mathbb{T}_r)$ ; \_\_\_\_\_ **Correcta**
- d) si existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  con  $|f(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$  entonces  $f$  es constante;
- e) si existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re} f(z_0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{Re} f(z)$  entonces  $f$  es constante; \_\_\_\_\_ **Correcta**
- f) Ninguna de las anteriores.

2. Sea  $(f_n)_n$  una sucesión de funciones enteras que converge uniformemente sobre compactos hacia  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ . Entonces:

- a)  $f$  es entera. \_\_\_\_\_ **Correcta**
- b) Si  $f$  no se anula en  $\mathbb{C}$ , entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq m$  se tiene que  $f_n$  no se anula en  $\mathbb{C}$ ;
- c) Si  $f$  no se anula en  $\mathbb{C}$ , y  $R > 0$  entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq m$  se tiene que  $f_n$  no se anula en  $D(0, R)$ ; \_\_\_\_\_ **Correcta**
- d) Si cada  $f_n$  tiene un número finito de ceros en  $\mathbb{C}$ , entonces  $f$  tiene un número finito de ceros en  $\mathbb{C}$ .
- e) Si el número de ceros en  $\mathbb{C}$  de cada  $f_n$  esta acotado por  $M$  y  $f$  no es idénticamente nula, entonces  $f$  tiene a lo más  $M$  ceros en  $\mathbb{C}$ . \_\_\_\_\_ **Correcta**
- f) Ninguna de las anteriores.

3. Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- a) Si  $T$  es una transformación de Möbius tal que  $T(\bar{x}) = \overline{T(x)}$  para todo  $x \in (0, 1)$  entonces  $T(\bar{z}) = \overline{T(z)}$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ ; \_\_\_\_\_ **Correcta**
- b) Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es abierto simplemente conexo, distinto de  $\mathbb{C}$  y simétrico respecto del eje real, existe una biyección holomorfa  $f$  de  $\Omega$  sobre  $D(0, 1)$  tal que  $f(\{z \in \Omega : \operatorname{Im} z > 0\}) = \{z \in D(0, 1) : \operatorname{Im} z > 0\}$ ; **Correcta**
- c)  $D(0, 1)$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{C} \setminus \{xe^{ix} : x \geq 0\}$ ; \_\_\_\_\_ **Correcta**
- d) Cualesquiera dos coronas no degeneradas son conformemente equivalentes;
- e)  $D(0, 1) \setminus \{0\}$  es conformemente equivalente a  $D(0, 1) \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$ .
- f) Ninguna de las anteriores.



**CUESTIÓN DEL DIARIO (1.5 puntos)**

Pruébese con un argumento de conexión que si  $T$  es una transformación de Möbius que lleva una recta en una circunferencia y un punto de un semiespacio determinado por la recta va al interior del disco determinado por la circunferencia, entonces la imagen de ese semiespacio es exactamente el interior de la circunferencia