Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Control: Análisis Complejo **13 Diciembre de 2011**

Alumna/o:

TEORÍA (4 puntos)

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Pruébese que si $\mathcal{F}$ es acotado entonces es relativamente compacto en $\big(H(\Omega), \tau_K\big)$.

Cuestiones Teóricas: Cada cuestión vale **1.5 puntos**. Marcar las soluciones correctas en cada cuestión: no es necesario escribir explicación alguna.

1. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\mathbb{T}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ para $r > 0$. Entonces:

   a) Si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{T}_1$ y f es no constante, entonces f se anula en $D(0,1)$; **Correcta**

   b) Si $f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{T}_{\frac{1}{2}} = \emptyset$, entonces f es constante; **Correcta**

   c) si $\sup_{z\in\mathbb{T}_r} |f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{T}_R} |f(z)|$ para $R, r > 0$ entonces $f(\mathbb{T}_R) = f(\mathbb{T}_r)$; **Correcta**

   d) si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|f(z_0)| = \operatorname{ínf}_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$ entonces f es constante;

   e) si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} f(z_0) = \operatorname{ínf}_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{Re} f(z)$ entonces f es constante; **Correcta**

   f) Ninguna de las anteriores.

2. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones enteras que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. Entonces:

   a) f es entera. **Correcta**

   b) Si f no se anula en $\mathbb{C}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se tiene que f_n no se anula en $\mathbb{C}$;

   c) Si f no se anula en $\mathbb{C}$, y $R > 0$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se tiene que f_n no se anula en $D(0, R)$; **Correcta**

   d) Si cada f_n tiene un número finito de ceros en $\mathbb{C}$, entonces f tiene un un número finito de ceros en $\mathbb{C}$.

   e) Si el número de ceros en $\mathbb{C}$ de cada f_n esta acotado por M y f no es identicamente nula, entonces f tiene a lo más M ceros en $\mathbb{C}$. **Correcta**

   f) Ninguna de las anteriores.

3. Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   a) Si T es una transformación de Möbius tal que $T(\overline{x}) = \overline{T(x)}$ para todo $x \in (0,1)$ entonces $T(\overline{z}) = \overline{T(z)}$ para cada $z \in \mathbb{C}$; **Correcta**

   b) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto simplemente conexo, distinto de $\mathbb{C}$ y simétrico respecto del eje real, existe una biyección holomorfa f de Ω sobre $D(0,1)$ tal que e $f\big(\{z \in \Omega : \operatorname{Im} z > 0\}\big) = \{z \in D(0,1) : \operatorname{Im} z > 0\}$; **Correcta**

   c) $D(0,1)$ es conformemente equivalente a $\mathbb{C} \setminus \{xe^{ix} : x \geq 0\}$; **Correcta**

   d) Cualesquiera dos coronas no degeneradas son conformemente equivalentes;

   e) $D(0,1) \setminus \{0\}$ es conformemente equivalente a $D(0,1) \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$.

   f) Ninguna de las anteriores.

CUESTIÓN DEL DIARIO (1.5 puntos)

Pruébese con un argumento de conexión que si T es una transformación de Möbius que lleva una recta en una circunferencia y un punto de un semiespacio determinado por la recta va al interior del disco determinado por la circunferencia, entonces la imagen de ese semiespacio es exactamente el interior de la circunferencia