Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Control: Análisis Complejo **8 Noviembre de 2011**

Alumna/o:

TEORÍA (2 puntos)

La serie que define ζ converge uniformemente sobre compactos de $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 1\}$ y así $\zeta \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es

Cuestiones Teóricas: Cada cuestión vale **1 puntos**. Marcar las soluciones correctas en cada cuestión: no es necesario escribir explicación alguna.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge puntualmente hacia $f \in \mathbb{C}^{\Omega}$. Entonces:
   a) f es continua pero no necesariamente holomorfa en Ω;
   b) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos de Ω, entonces f es continua pero no necesariamente holomorfa en Ω;
   c) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos de Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$; ________ **Correcta**
   d) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre fronteras de cuadrados contenidos en Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$; **Correcta**
   e) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre fronteras de triangulos contenidos en Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$; **Correcta**
   f) Ninguna de las anteriores.

2. Decidir cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas:
   a) Como $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n})$ converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n}$ converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$;
   b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n})$ converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n}$ no converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$;________ **Correcta**
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n}$ converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n})$ no converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$;
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ no converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$;
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ a g que cumple $g(z) + \frac{1}{z^2} + g(-z) = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}$en $\mathbb{C}$;________ **Correcta**
   f) Ninguna de las anteriores.

3. Consideremos el producto formal $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ donde $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
   a) Si $f_n(z) := (1 - \frac{z}{a_n})e^{\frac{z}{a_n}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-2} < +\infty$, entonces el producto converge en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$;_**Correcta**
   b) Si $f_n(z) := (1 - \frac{z}{a_n})e^{\frac{z}{a_n}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-1} < +\infty$, entonces el producto converge en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$;_**Correcta**
   c) Si el producto converge en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{f_n'}$ converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$;
   d) Si el producto converge en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n}$ converge en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$;________ **Correcta**
   e) si $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n^2}$ para cada $z \in \mathbb{C}$ entonces el producto converge en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.
   f) Ninguna de las anteriores.

4. Para $R > 0$ y $|a| < R$ escribimos $S_a^R(z) := \frac{R(z-a)}{R^2 - \bar{a}z}$. Entonces:
   a) S_a^R aplica de forma biyectiva $D(0, R)$ en si mismo.
   b) S_a^R aplica de forma biyectiva $D(0, R)$ en $D(0, 1)$.________ **Correcta**
   c) Si $R = 1$ entonces $(S_a^R)'(a) = \frac{1}{1-a^2}$.
   d) Si $R = 1$ entonces $(S_a^R)'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$.________ **Correcta**
   e) El conjunto $\{z \to e^{i\alpha} S_a^R(z) : \alpha \in \mathbb{R}, |a| < R\}$ son todas las biyecciones holomorfas que transforman $D(0, R)$ en $D(0, 1)$;________ **Correcta**
   f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es

CUESTIÓN DEL DIARIO

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $0 < \rho_n \to +\infty$ y $M_n := \sup\{|f(z)| : |z| = \rho_n\}$. Si se verifica $\text{lím}_n \frac{M_n}{\rho_n} = 0$, entonces

$$\text{lím}_n \int_{C_n} \frac{f(z)}{w(w-z)} dw = 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \neq \rho_n$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es

PROBLEMA (2 Puntos)

Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tales que $f(0) = g(0)$ y $f(D(0,1)) \subseteq g(D(0,1))$. Pruébese que si g es inyectiva y $0 < r < 1$ entonces $f(D(0,r) \subseteq g(D(0,r))$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es