Hoja de Problemas 4. Variable Compleja **14 de Diciembre de 2011**

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Se supone que cada punto $a \in \Omega$ posee un entorno abierto $V_a \subset \Omega$ tal que la familia de las restricciones a V_a, $\mathcal{F}|_{V_a} = \{f|_{V_a} : f \in \mathcal{F}\}$ es normal en $\mathcal{H}(V_a)$. Pruébese que $\mathcal{F}$ es normal en $\mathcal{H}(\Omega)$.

2. Sean $G, \Omega \subset \mathbb{C}$ abiertos y $\mathcal{F}$ una familia normal en $\mathcal{H}(G)$ tal que $f(G) \subset \Omega$ para toda $f \in \mathcal{F}$ Se supone que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ es una función que está acotada sobre cada acotado $M \subset \Omega$. Pruébese que entonces $\{g \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ es una familia normal en $\mathcal{H}(G)$. Muéstrese con un ejemplo que el resultado anterior puede ser falso si g no cumple la condición anterior.

3. Pruébese que si $\mathcal{F}$ es una familia normal en $\mathcal{H}(\Omega)$, entonces la familia de las derivadas $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ también es normal. ¿Es cierto el reciproco?¿Qué condición adicional se puede añadir para que sea cierto? Pruébese además que si $\mathcal{F}$ una familia compacta formada por funciones que no se anulan en Ω, entonces la familia $\{f'/f : f \in \mathcal{F}\}$ también es compacta.

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$, formada por funciones que verifican: $|f_n(z)| > 1$ para todo $z \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Se sabe que existe un punto $a \in \Omega$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = 1$. Pruébese que la sucesión (f_n) convege hacia 1, uniformemente sobre compactos.

5. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im\ z}| < 1\}$. Se sabe que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$, y que $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ Pruébese que la sucesión $f_n(z) = f(n+z)$ converge en $\mathcal{H}(\Omega)$.

6. Dado un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, se considera la familia de funciones
$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : |f'(a)| \geq \beta, |f(z)| \leq \alpha, \forall z \in \Omega\}$$
donde $a \in \Omega$ y $\alpha, \beta > 0$. Dado un compacto $K \subset \Omega$ sea $n(f, K)$ el número de ceros de f en K (repetidos según multiplicidades). Pruebese que $\{n(f, K) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado.

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado y $a \in \Omega$. Se supone que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es una función que cumple: $f(a) = a$, y $f(\Omega) \subset \Omega$. Sea (f_n) la sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$ definida de modo recurrente por: $f_1 = f$, $\ f_2 = f \circ f_1, \ldots f_{n+1} = f \circ f_n$. Pruébese que $(f_n'(a))$ es una sucesión acotada y deduzcase de ello que $|f'(a)| \leq 1$.

8. Pruébese que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ se verifica la desigualdad
$$|f(a)|^2 \leq J(a, R, f)/\pi R^2$$
siendo
$$J(a, R, f) = \int_{D(a,R)} |f(x + iy)|^2 dxdy$$
Deduzcase de ello que si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ es una familia tal que $\sup\{J(a, R, f) : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ para todo disco compacto $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$, entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.

9. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$. Pruébese que en los dos casos que siguen (f_n) converge uniformemente sobre compactos hacia una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

   a) $0 < |f_n(z)| < |f_{n+1}(z)| < \ldots$ para todo $z \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$ y existe un punto $a \in \Omega$ tal que la sucesión $(f_n(a))$ es convergente. *Sugerencia: Pruébese que* $h(z) = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(z)|$ *es finito para todo* $z \in \Omega$ *, y define sobre* Ω *una función continua* h.

   b) La sucesión de sus partes reales $u_n(z) = \mathrm{Re\ (f_n(z))}$ es uniformemente convergente sobre compactos y la sucesión $(f_n(a))$ converge en el punto $a \in \Omega$.

10. Sea $\Omega = D(0, 1)$. Pruébese que las siguientes familias de funciones son compactas en $\mathcal{H}(D(0, 1))$:

a) $\{f \in \mathcal{H}(D(0,1)) : f(0) = e, |f(z)| > 1, \text{ si } z \in D(0,1)\}$;

b) $\{f \in \mathcal{H}(D(0,1)) : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \text{ con } |a_n| \leq n \text{ para todo } n \geq 2\}$

11. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $a \in G$ y supongamos que $f : G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ es una función analítica e inyectiva tal que $f(G \setminus \{a\}) = \Omega$ es acotado. Pruébese que $\lim_{z \to a} f(z) \in \partial\Omega$. Utilícese lo anterior para probar que no existe ninguna función analftica e inyectiva de $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ sobre $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ donde $0 < r < R$.

12. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y a, b, dos puntos distintos de Ω. Se sabe que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es una función inyectiva con imagen $f(\Omega) = \Omega$. Pruébese que una condición necesaria y suficiente para que f sea la identidad es que $f(a) = a$, y $f(b) = b$.

13. Sea f una biyección conforme del disco unidad $D(0,1)$ sobre el cuadrado abierto $\{x + iy : |x| < 1, |y| < 1\}$ verificando $f(0) = 0$. Pruébese que $f^{(n)}(0) = 0$ si $n - 1$ no es m·ltiplo de 4.

14. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im z}| < \frac{\pi}{2}\}$.

 a) Si $P = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re z} > 0\}$, calcúlese el valor de

$$\sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{H}(\Omega), f(\Omega) \subset P, f(0) = 1\}$$

 ¿Es accesible este supremo?.

 b) Calcúlese

$$\sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{H}(\Omega), f(\Omega) \subset \overline{D(0,1)}\}.$$

15. Sea $\Omega = D(0,1)$, y

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(0) = 1, \text{Re (f(z))} > 0, \forall \text{z} \in \Omega\}$$

 a) Pruébese que $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}(\Omega)$ y que $|f'(0)| \leq 2$ para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

 b) Demuéstrese que si $f \in \mathcal{F}$ y $|f'(0)| = 2$, entonces $f(z) = \dfrac{1 + \alpha z}{1 - \alpha z}$, donde α es una constante con $|\alpha| = 1$.

16. Sea $\Omega = D(0,1)$, y

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(0) = 1, \text{Re (f(z))} > 0, \forall \text{z} \in \Omega\}$$

 a) Pruébese que $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}(\Omega)$ y que $|f'(0)| \leq 2$ para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

 b) Demuéstrese que si $f \in \mathcal{F}$ y $|f'(0)| = 2$, entonces $f(z) = \dfrac{1 + \alpha z}{1 - \alpha z}$, donde α es una constante con $|\alpha| = 1$.

17. Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. Pruébese que si una función armónica en Ω es constante en algún disco contenido en Ω, entonces es constante en Ω. Muéstrese mediante un ejemplo que dos funciones armónicas en un abierto conexo Ω pueden coincidir en un conjunto de puntos que se acumulan en Ω y ser distintas.

18. Demuéstrese que una función armónica no constante, definida en un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$ es abierta.

19. Pruébese que si $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es armónica y no constante, entonces es sobreyectiva.

20. Sea u una función armónica en $\mathbb{C}$. Pruébese que si u^2 es armónica, entonces u es constante.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es

21. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado. Sea (u_n) una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y con la propiedad de la media en Ω y que converge uniformemente sobre $\partial\Omega$. Pruébese que existe una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{\Omega}$ y armónica en Ω tal que (u_n) converge uniformemente hacia u sobre Ω.

22. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ y u una función armónica en Ω.

    i) Pruébese que $A(r) := \sup_{0\le\theta\le 2\pi} u(re^{i\theta})$ es una función convexa de $\log r$ en el intervalo (r_1, r_2).

    ii) Dedúzcase de i) el teorema de los tres círculos de Hadamard: Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y no se anula en Ω, entonces se tiene

    $$\log M(\rho) \le \frac{\log\rho_2 - \log\rho}{\log\rho_2 - \log\rho_1}\log M(\rho_1) + \frac{\log\rho - \log\rho_1}{\log\rho_2 - \log\rho_1}\log M(\rho_2)$$

    donde $r_1 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < r_2$ y $M(\rho) := \sup_{0\le\theta\le 2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|$

23. Sea u_n una sucesión de funciones armónicas en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que converge, uniformemente sobre compactos de Ω, hacia la función u.

    i) Pruébese que para cada $a \in \Omega$ existe $D(a, R) \subset \Omega$ y $f_n, f \in \mathcal{H}(D(a, r))$, $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\mathrm{Re}\,(\mathrm{f_n}) = \mathrm{u_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}\,(\mathrm{f}) = \mathrm{u}$, siendo $f_n \to f$ en $\mathcal{H}(D(a, R))$.

    ii) Dedúzcase de $i)$ que

    $$\frac{\partial^m}{\partial x^j \partial y^k} u_n \to \frac{\partial^m}{\partial x^j \partial y^k} u \qquad (m = k + j)$$

    uniformemente sobre compactos de Ω.

24. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im\ z} \ge 0, |\mathrm{z}| \le 1\}$ y $u : A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y armónica en el interior de A que satisface $u(x) = 0$ para $-1 \le x \le 1$.

    i) Pruébese que a lo mas existe una función continua $v : \overline{D(0, 1)} \to \mathbb{R}$, armónica en $D(0, 1)$ y verificando $v|_A = u$.

    ii) Pruébese que existe una única función continua $P : \overline{D(0, 1)} \to \mathbb{R}$, armónica en $D(0, 1)$ y satisfaciendo

    $$f(e^{i\theta}) = \begin{cases} P(e^{i\theta}) & \text{si} \quad 0 \le \theta \le \pi \\ -u(e^{-i\theta}) & \text{si} \quad \pi \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

    y que esta función cumple $P|_A = u$.

25. Pruébese que la función $u(z) = \mathrm{Im}\left(\frac{1+\mathrm{z}}{1-\mathrm{z}}\right)^2$ es armónica en $D(0, 1)$ y que $\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = 0$ para cada $\theta \in [0, 2\pi]$. ¿Contradice este hecho la validez de la fórmula integral de Poisson?.

Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es