**Hoja de Problemas 3. Variable Compleja** **22 de Noviembre 2011**

1. Determínense geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

   a) $\{z : \mathrm{Im}\,(\frac{\mathrm{z}-\mathrm{a}}{\mathrm{b}}) = 0\}$, $\{z : \mathrm{Im}\,(\frac{\mathrm{z}-\mathrm{a}}{\mathrm{b}}) > 0\}$ , $a, b \in \mathbb{C}$;

   b) $\{z : \mathrm{Re}\,(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}) = 1\}$, $\{z : \mathrm{Re}\,(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}) > 1\}$ , $b \in \mathbb{C}$;

   c) $\{z : |z|^2 - \mathrm{Re}\,(\bar{\mathrm{a}}\mathrm{z}) + \alpha = 0\}$, $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

   d) $\{z : |z - a| = \alpha|z - b|\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$;

   e) $\{z : |z - a| = |1 - \bar{a}z|\}$, $|a| < 1$.

2. ¿Cual es la condición que satisfacen dos puntos $z$ y $w$ de $\mathbb{C}$ que son las imagenes mediante la proyección estereográfica de dos puntos diametralmente opuestos de $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$?

3. Si $S$ es una transformación de Möbius demuéstrese que la condición $S(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ es equivalente a que existan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc \neq 0$ tales que $Sz = \dfrac{az + b}{cz + d}$ para cada $z \in \mathbb{C}_\infty$.

4. Sean $Sz = \dfrac{az + b}{cz + d}$ y $Tz = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$. Pruébese que $S = T$ si, y sólo si, existe un número complejo no nulo $\lambda$ tal que $\alpha = \lambda a$, $\beta = \lambda b$, $\gamma = \lambda c$ y $\delta = \lambda d$.

5. Sea $S$ una transformación de Möbius distinta de la identidad. Pruébese que si $T$ es otra transformación de Möbius con los mismos puntos fijos que $S$, entonces $S$ y $T$ conmutan, e.d., $S \circ T = T \circ S$.

6. Obténgase la forma general de las transformaciones de Möbius que:

   *a*) Dejan invariante el disco $D(0, R)$.

   *b*) Dejan invariante el semiplano $\{z : Im(z) > 0\}$.

   *c*) Transforman el semiplano $\{z : Im(z) > 0\}$ en el disco $D(0, R)$.

   *d*) Transforman el disco $D(a, r)$ en el disco $D(b, s)$.

7. Determínense la imagenes de los siguientes dominios $\Omega$ mediante las funciones $f$ que se indican:

   i) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\ \mathrm{z}| < \pi\}$, $f(z) = e^z$

   ii) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \mathrm{z} > 0, |\mathrm{Im}\ \mathrm{z}| < \pi\}$, $f(z) = e^z$

   iii) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \mathrm{z} > 0, \mathrm{Im}\ \mathrm{z} > 0\}$, $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$

   iv) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Arg}\ \mathrm{z} < \frac{\pi}{4}\}$, $f(z) = \dfrac{z}{z - 1}$

   v) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im}\ \mathrm{z} < 0\}$, $f(z) = \dfrac{(Tz)^2 - i}{(Tz)^2 + i}$ donde $T$ es la transformación inversa de $Sz = \dfrac{z - i}{z + i}$.

   vi) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Rez < \frac{\pi}{4}\}$, $f(z) = \mathrm{tg}\, z$

   ¿En cuales de los apartados anteriores las aplicaciones dadas establecen biyecciones conformes?

8. Obténganse biyecciones conformes entre los abiertos $\Omega$ y $G$ que siguen:


Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es

*a)* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Re\ z} > 0\}$, $G = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re\ z} > 0, \mathrm{Im\ z} > 0\}$.

*b)* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Re\ z} > 0\}$, $G = D(0,1)$

*c)* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Re\ z} > 0, \mathrm{Im\ z} > 0\}$, $G = D(0,1)$.

*d)* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im\ z}| < \pi/2\}$, $G = D(0,1)$.

*e)* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im\ z}| < \pi/4\}$, $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Re\ z} > 0\}$.

*f)* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$, $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

*g)* $\Omega = D(a,r) \cap D(b,R)$ (Donde suponemos que $\Omega \neq \emptyset$ ), $G = D(0,1)$

*h)* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z-1| < 1\}$, $G = D(0,1)$.

*i)* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1, |z-2| < 2, Im(z) > 0\}$, $G = D(0,1)$.

*j)* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re\ z} > 0, |\mathrm{z} - 5| > 3\}$, $G$ una corona circular concéntrica a determianr.

9. Sea $J : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ la transformación de Joukowski definida por

$$J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), J(0) = \infty, J(\infty) = 0$$

Determínese la imagen mediante $J$ de los siguientes abiertos:

$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$
$B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im\ z} > 0\}$
$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$
$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \mathrm{Im\ z} < 0\}$
$E = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$.

Pruébese que $J$ establece una biyección conforme entre cada uno de estos abiertos y su imagen. Como aplicación muéstrese que sobre los abiertos $J(B), J(D)$, y $J(E)$, se pueden determinar ramas analíticas de la función multiforme $\arccos z$.

Pruébese también que $J$ transforma, de modo biyectivo y conforme, el interior de cada circunferencia que pasa por $+1$ y $-1$ en el complementario de un arco de circunferencia de extremos $+1$ y $-1$.

(**Indicación:** $(J(z)-1)/((J(z)+1) \ = \ ((z-1)/(z+1))^2)$.

10. Pruébese que la función $\cos z$ tiene por imagen todo el plano complejo $\mathbb{C}$ y que su restricción a cada uno de los siguientes abiertos es conforme e inyectiva:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re\ z} < \pi\}$$
$$\Omega^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im\ z} > 0\} \cap \Omega$$
$$\Omega^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im\ z} < 0\} \cap \Omega$$
$$G = \{z : 0 < \mathrm{Re\ z} < 2\pi, \mathrm{Im\ z} > 0\}$$

Obténgase la imagen de estos abiertos mediante la función $\cos z$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es