Hoja de Problemas 2. Variable Compleja **25 de Octubre 2011**

1. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se supone que hay un disco $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ tal que $f(a) = 1$ y $|f(z)| > 2$ cuando $|z - a| = r$. Pruébese que f se anula en algún punto del disco abierto $D(a,r)$.

2. Se supone que f es una función no constante holomorfa en un abierto conexo Ω y que $|f|$ es constante sobre la frontera de un disco $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$. Pruébese que f se anula en algún punto $z_0 \in D(a,r)$.

3. Sea f una función entera no constante. Pruébese que la función $M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\}$, definida en $[0, +\infty)$, es creciente continua y $\text{lím}_{r\to\infty} M(r) = +\infty$.

4. Sea $p(z)$ un polinomio complejo no constante. Pruébese que si $\varepsilon > 0$ entonces cada componente conexa del abierto $\{z : |p(z)| < \varepsilon\}$ contiene un cero de p.

5. Sea Ω un abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante. Pruébese que si $K := \{z \in \Omega : |f(z)| \leq 1\}$ es compacto no vacío, entonces f se anula en algún punto de su interior.

6. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(0,R)$. Pruébese que si $a \in D(0,R)$ y $f(a) = b$ entonces para cada $z \in D(0,R)$ se cumple:
$$\left|\frac{M(f(z) - f(a))}{M^2 - \bar{b}f(z)}\right| \leq \left|\frac{R(z-a)}{R^2 - \bar{a}z}\right|$$
Dedúzcase de lo anterior que si $M = R = 1$, para todo $z \in D(0,1)$ se cumple:
$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$
para cada $z \in D(0,1)$.

7. Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1)$ tales que $f(0) = g(0)$ y $f(D(0,1)) \subseteq g(D(0,1))$. Pruébese que si g es inyectiva y $0 < r < 1$ entonces $f(D(0,r) \subseteq g(D(0,r))$.

8. Sea Ω un abierto conexo tal que $\overline{D(0,1)} \subseteq \Omega$ y f una función holomorfa en Ω que verifica $|f(z)| \leq 1$ si $|z| = 1$. Pruébese que si existen dos puntos $a, b \in D(0,1)$, $a \neq b$, tales que $f(a) = a$, $f(b) = b$ entonces f es la identidad.

9. Sea $0 < r < R$ y $A = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$. Muéstrese que existe un número positivo $\varepsilon > 0$, tal que para cada polinomio p,
$$\sup_{z\in A}\{|p(z) - z^{-1}|\} \geq \varepsilon$$

10. Sea $f : D(0,1) \to D(0,1)$ una función analítica. Considerando la función $g : D(0,1) \to D(0,1)$ definida por
$$g(z) = \frac{f(z) - a}{1 - \bar{a}f(z)}$$
donde $a = f(0)$, pruebese que
$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 + |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 - |f(0)||z|}$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es

11. ¿Existe una función holomorfa $f : D(0,1) \to D(0,1)$ tal que $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ y $f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$?

12. Sea f una función holomorfa definida en un abierto que contiene al disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ $(R > 0$

    a) Pruébese que si $f(0) = 0$ y $0 \leq r < R$ entonces

    $$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R)$$

    donde $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z| \leq r\}$ y $A(r) = \sup\{\text{Real } f(z) : |z| \leq r\}$.

    b) Dedúzcase de lo anterior que cualquiera que sea el valor de $f(0)$ se tiene

    $$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|$$

13. Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,r))$, con $r > 1$, tales que f y g no se anulan en $D(0,1)$. Se supone $|f(z)| = |g(z)|$ para $|z| = 1$ y que $f(0) > 0, g(0) > 0$. Pruebese que $f = g$.

14. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $\lim\limits_{|z| \to 1} |f(z)| = 1$. Pruebese que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| = 1$, y $a_1, a_2, ...a_n \in D(0,1)$ verificando $f(z) = \lambda \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$ para cada $z \in D(0,1)$.

15. Dada una sucesión (f_n) en $\mathcal{H}(\Omega)$ pruébese que son equivalentes:

    a) $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω.

    b) Para cada camino cerrado γ en Ω $f_n \to f$ uniformemente sobre $K = \text{Imagen}(\gamma)$.

16. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ que satisface $\text{Real} f(z) \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $f(0) = f'(0) = 0$. Establézcase la desigualdad $|R^2 f(z)| \leq |z^2(2R - f(z))|$ válida para $|z| \leq R$ y dedúzcase de ello que f es identicamente nula en $\mathbb{C}$.

17. Pruébese que si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y f es inyectiva en $D^*(0,1)$ entonces f es inyectiva.

18. Pruébese que si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ entonces existe una sucesión (z_n) en $D(0,1)$ tal que $(f(z_n))$ es una sucesión acotada y $\lim_{n \to \infty} |z_n| = 1$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es