Hoja de Problemas 1. Variable Compleja **5 Octubre 2011**

1. Establézcanse los desarrollos (de Mittag-Leffler) que se indican:

   a) $\pi \operatorname{cotg} \pi z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$, para z en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

   b) $\pi \operatorname{tg} \pi z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{(n+\frac{1}{2})^2 - z^2}$, para z en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$.

   c) $\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2}$, para z en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

   d) $\dfrac{\pi}{\cos \pi z} = 2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+\frac{1}{2})}{(n+\frac{1}{2})^2 - z^2}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$.

   e) $\dfrac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$, para z en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$, para z en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{2n\pi i : n \in \mathbb{Z}\}$.

   Pruébese que las series anteriores convergen uniformemente sobre compactos de los abiertos Ω indicados para cada una de ellas.

2. Determinar las funciones meromorfas F más generales cuyas únicas singularidas son:

   a) Polos simples en a^n con $\operatorname{Res}(F, a^n) = a^n$, $n = 1, 2, ...$

   b) Polos simples en ± 1, ± 2, ± 3,... con $\operatorname{Res}(F, \pm n) = n$, $n = 1, 2, ...$

   c) Polos simples en 0,± 1, ± 2, ± 3,... con $\operatorname{Res}(F, \pm n) = (-1)^n$, $n = 1, 2, ...$

3. Si $\alpha \neq 0$ y $\dfrac{\beta}{\alpha} \neq \pm 1, \pm 2, ...$, pruTbese que

$$\frac{\pi}{\alpha} \operatorname{cotg} \frac{\pi \beta}{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n\alpha + \beta} - \frac{1}{n\alpha + (\alpha - \beta)}\right)$$

   Dedúzcase de la igualdad anterior que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

4. Integrando la función $g(w) = \dfrac{\operatorname{sen} w}{w(w-z)\cos^2 w}$ a lo largo del borde de los cuadrados Q_m de vértices $\pm m\pi, \pm im\pi$, pruébese que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{\cos^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z - (n+\frac{1}{2})\pi)^2}$$

5. Sea $a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$ una sucesión estrictamente creciente de números reales no nulos satisfaciendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < +\infty$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es

a) Pruébese que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_n})e^{\frac{z}{a_n}}$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$.

b) Sea f la función holomorfa definida por el producto infinito considerado en a). Obtener el desarrollo de Mittag-Lefler de $\frac{f'}{f}$

c) Estudiando $\frac{d}{dz}[\frac{f'}{f}]$ restringida a los intervalos (a_n, a_{n+1}) pruébese que $\frac{f'}{f}$ es estrictamente decreciente en cada uno de ellos.

d) Utilizando que los a_n son polos de $\frac{f'}{f}$ y lo establecido en c) pruébese que $\frac{f'}{f}$ cambia de signo en (a_n, a_{n+1}) y concluyase de ahí que existe un único $a'_n \in (a_n, a_{n+1})$ tal que $f'(a'_n) = 0$

6. Sea F una función entera cuyos ceros $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ son todos simples. Se supone que $0 < |a_1| < |a_2| < ... < |a_n| < ...$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-2} < +\infty$. Sea (ρ_n) una sucesión de números positivos tal que $|a_n| < \rho_n < |a_{n+1}|$ y

$$M_n = sup\{|\frac{F'(z)}{F(z)}| : |z| = \rho_n\}$$

Pruébese que si $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\rho_n} = 0$, entonces se tiene la factorización:

$$F(z) = F(0)e^{z\frac{F'(0)}{F(0)}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_n})e^{\frac{z}{a_n}}$$

7. Pruébense las siguientes formulas de factorización:

a) $\cos \pi z = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2})$,

b) $\operatorname{senh} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z^2}{n^2})$,

c) $\cosh \pi z = \prod_{n=0}^{\infty}(1+(\frac{2z}{2n+1})^2)$,

d) $\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$.

Dedúzcase de la última factorización la fórmula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n)^2 - 1}.$$

8. Utilizando el desarrollo de Mittag-Letler de $\pi tg\pi z$, demuéstrese que

$$\cos\frac{\pi z}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi z}{4} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+(1)^n\frac{z}{2n-1})$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es

9. Probar que existe $\lim_n[(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-\log n]$.

10. Pruébese la fórmula de los complementos para la función Γ:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$$

11. Pruébese que la derivada logarítmica de la función Γ viene dada por la expresión

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)}$$

para $z\neq 0,-1,-2,...$, siendo la convergencia de la serie uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}-\{0,-1,-2,...\}$. Dedúzcase de lo anterior que $\log\Gamma(x)$ es una función convexa para $(0,+\infty)$.

12. Pruébese el siguiente teorema de Bohr-Mollerup : Sí $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ cumple las siguientes propiedades.

    a) $\log f(x)$ es convexa.
    b) $f(x+1)=xf(x)$ para $x\in(0,+\infty)$
    c) $f(1)=1$.

    entonces $f(x)=\Gamma(x)$ para todo $x\in(0,+\infty)$.

13. Pruébese que el producto infinito

$$z\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{\sqrt{n}})e^{\frac{-z}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{n}}$$

converge uniformemente sobre compactos, y define una función entera f que verifica

$$f(z)f(-z)\Gamma(-z^2)=e^{g(z)}$$

donde $g(z)$ es una función entera a determinar.

14. Sea $\varphi(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Pruébese que $\varphi'(z)+\varphi'(z+\frac{1}{2})=4\varphi'(2z)$. Dedúzcase que $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=\Gamma(2z)e^{az+b}$ obteniendo finalmente la fórmula de duplicación de Legendre

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}).$$

15. Sea $\varphi(z)$ como en el ejercicio anterior. Pruébese:

    a) $\varphi(z+1)-\varphi(z)=\dfrac{1}{z}$
    b) $\varphi(1-z)-\varphi(z)=\pi\cot\pi z$.

Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es

16. Pruébese que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$$

y dedúzcase de esto que

$$z e^{\frac{z}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}) = e^z - 1.$$

17. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y A un subconuto de Ω con $A' \cap \Omega = \emptyset$. Para cada $\alpha \in A$ se supone dada una cantidad finita de números complejos $\{\omega_{n,\alpha} \in \mathbb{C} : 0 \leq n \leq m(\alpha)\}$. Pruébese que existe $f \in \mathbb{H}(\Omega)$ tal que

$$f^{(n)}(\alpha) = \omega_{n,\alpha}$$

si $\alpha \in A$ y $0 \leq n \leq m(\alpha)$.

18. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números complejos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| < +\infty$.

¿Sobre que conjuntos es convergente el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - a_n}{z - b_n}$?¿Dónde define el producto anterior una función holomorfa?

Bernardo Cascales. e-mail: beca@um.es