Fundamentos de Investigación Matemática
Bloque B: Análisis Matemático

Profesorado

- Dr. D. Francisco Balibrea Gallego.
  ✉: balibrea@um.es☎: 968364176
- Dr. D. Bernardo Cascales Salinas.
  ✉: beca@um.es☎: 968364174
- Dr. D. Victor Jiménez López
  ✉: vjimenez@um.es☎: 968364177
- Dr. D. José Orihuela Calatayud.
  ✉: joseori@um.es☎: 968363539
- Dr. D. Gabriel Vera Botí.
  ✉: gvb@um.es☎: 968363538

Objetivos del aprendizaje

El principal objetivo de este curso es el de introducir y familiarizar al alumno en técnicas profundas de Análisis Funcional, Teoría de la Medida y de Sistemas Dinámicos, así como de Topología Conjuntista, necesarias para abordar poblemas clásicos y modernos del Análisis Matemático. Los alumnos que superen este curso, estarán en condiciones no sólo de abordar las demás asignaturas del Programa de Postgrado relacionadas con los campos antes mencionados, sino de iniciar líneas de investigación relacionadas con los mismos.

Temario

El temario está dividido en cuatro bloques, según los objetivos descritos anteriormente.

1. **Teoría descriptiva de conjuntos.**
   (Prof. José Orihuela)
   - *El paraíso de Cantor y la hipótesis del continuo:* Números cardinales y números ordinales. Árboles. La operación de Souslin.
   - *Espacios Polacos y espacios métricos compactos:* Extensión de funciones continuas y homeomorfismos. El cubo de Hilbert. El compacto de Cantor. El hiperespacio de los conjuntos compactos, el espacio donde viven los fractales.
   - *Teoremas de transferencia:* Copias del conjunto de Cantor. Teorema de Cantor-Bendixson, derivaciones. Caracterizaciones topológicas del conjunto de Cantor y del espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   - *Topología descriptiva de conjuntos:* Conjuntos de Borel. Conjuntos analíticos. La hipótesis del continuo sobre conjuntos descriptivos. El teorema de Souslin.

2. **Los principios fundamentales del Análisis Funcional. Aplicaciones**
   (Prof. Bernardo Cascales)
   - *Teorema de Hahn-Banach:* Aplicación a la separación de conjuntos convexos. El espacio dual $C([a,b])^*$. Aplicación a problemas de aproximación: Teorema de Čebishev y teorema de Muntz.
   - *Teorema de Baire:* Aplicación a la existencia de funciones continuas no diferenciables.
   - *Teorema de la acotación uniforme:* Aplicación a fórmulas de cuadratura y a la existencia de series de Fourier de funciones continuas que no convergen puntualmente.
   - *Teorema de la gráfica cerrada:* Aplicaciones al teorema del Rango Cerrado y las alternativas de Fredholm.
3. **Medidas, integrales y martingalas**
   (Prof. Gabriel Vera)
   - *Preliminares sobre medida e integración:* Construcción de medidas e integración abstracta. Teorema de representación de Riesz y medidas de Radon.
   - *Espacios* $L^p(\mu)$. Diferentes nociones de convergencia. Integrabilidad uniforme y compacidad débil.
   - *Martingalas:* Esperanza condicionada. Tiempos de parada y transformaciones de martingalas. Convergencia de martingalas. Ejemplos y aplicaciones: Teorema de Radon Nikodym y teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue.
   - *Introducción a los procesos estocásticos:* Medidas en productos infinitos y construcción de procesos canónicos. Procesos de Markov y Movimiento Browniano.
   - *Introducción a la teoría ergódica:* Transformaciones ergódicas. Teorema ergódico puntual. Aplicaciones.
4. **Introducción a las Sistemas Dinámicos**
   (Prof. Francisco Balibrea y Víctor Jiménez)
   - *Preliminares sobre Sistemas Dinámicos*: Noción de sistema dinámico. Sistemas dinámicos continuos y discretos. Espacios de fases y flujos, periodicidad y conjuntos ω-límite. Ejemplos: ecuaciones de Lorenz de predicción del tiempo atmosférico, modelos discretos y continuos de poblaciones, el atractor de Hénon, fractales, sistemas dinámicos simbólicos.
   - *Sistemas Dinámicos Continuos*: Puntos críticos, órbitas regulares y órbitas periódicas. Sistemas lineales, atractores, repulsores y puntos de silla. Sistemas no lineales, isoclinas, teorema de Poincaré-Bendixon e integrales primeras. Aplicaciones.
   - *Sistemas Discretos*: Análisis gráfico. Puntos fijos y periódicos, conjuntos estables. Teorema de Sharkovsky. La familia logística. Bifurcación por duplicación de período, la constante universal de Feigenbaum. Dinámica simbólica, sensibilidad a las condiciones iniciales y caos.

BIBLIOGRAFÍA

- L. Alsedà, J. Llibre and M. Misiurewicz, *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one* second edition. Advances Series in Nonlinear Dynamics, 5, World Scientific Co.,Inc.,River Edge, 2000.
- R.B. Ash M.F. Gardner *Topics in stochastic processes*, Probability and Mathematical Statistics. vol 27. 1975.
- H.Bauer *Probability theory*, Walter de Gruyter & Co.Berlin 1996
- F. Brauer and J. Nohel *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction*, Dover, New York, 1989.
- R. Holmgren *A first course in discrete dynamical systems*, second edition. Universitext, Springer-Verlag, 1992.
- V. Jiménez López *Ecuaciones diferenciales: cómo aprenderlas, cómo enseñarlas*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia, Murcia, 2000.
- P.E.Kopp.*Martingales and stochastics integrals*, Cambridge University Press, 1984.
- A. S. Kechris, *Calssical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.
- Y. N. Moschovakis *Notes on set theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1994.
- R.L. Schiling *Measures, integrals and martingales*, Cambridge University Press, 2006.
- S. M. Srivastava *A course on Borel sets*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1998.
- E. Tomarelli *Modelli dinamici discreti*, Springer-Verlag, Milan,1994.
- E. Zeidler *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physiscs*, Springer-Verlag, 1995.

Enfoque metodológico

En el desarrollo de la signatura, se alternarán las cases magistrales por parte del profesor con clases prácticas de resolución de problemas y con algunas exposiciones orales por parte de los alumnos de temas previamente encargados a los mismos. En todas los casos se tratará de ofrecer al alumno un acercamiento intuitivo a los objetos matemáticos que se consideran.

Como complemento se invitará a los alumnos a asistir a las conferencias que sobre temas avanzados del Análisis Matemático, son sistemáticamente impartidas por especialistas invitados por nuestros Grupos de Investigación.

Enfoque evaluativo

Los alumnos tendrán que realizar algunas exposiciones de temas relacionados con los que se expliquen en las diferentes sesiones y entregar resueltos problemas que se les planteen.

La calificación final se obtendrá tras una reunión de evaluación de los profesores que intervienen en este bloque.